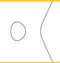
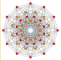


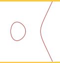


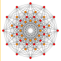


# Algebraische und Arithmetische Geometrie

## an der HU Berlin

# Worum geht es in der algebraischen Geometrie?







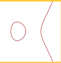
Ziel ist das Studium geometrischer Objekte, welche sich durch polynomiale Gleichungen beschreiben lassen:

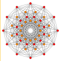
# Worum geht es in der algebraischen Geometrie?

Was?
Wie?
Wer?

Ziel ist das Studium geometrischer Objekte, welche sich durch polynomiale Gleichungen beschreiben lassen:

- Algebraische Aspekte





# Worum geht es in der algebraischen Geometrie?



Ziel ist das Studium geometrischer Objekte, welche sich durch polynomiale Gleichungen beschreiben lassen:

- Algebraische Aspekte
- Geometrische Aspekte

# Worum geht es in der algebraischen Geometrie?



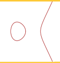
Ziel ist das Studium geometrischer Objekte, welche sich durch polynomiale Gleichungen beschreiben lassen:

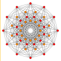
- Algebraische Aspekte
- Geometrische Aspekte
- Arithmetische Aspekte

# Beispiel: Algebraische Kurven

Sei $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ein Polynom.

# Beispiel: Algebraische Kurven





Sei $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ein Polynom.

Betrachte

$$V(K) \;:=\; \left\{ (x,y) \in K^2 \mid y^2 = f(x) \right\}.$$

Was?
Wie?
Wer?

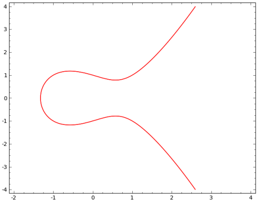
# Beispiel: Algebraische Kurven

Sei $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ein Polynom.

Betrachte

$$V(K) := \{(x,y) \in K^2 \mid y^2 = f(x)\}.$$

Für $K = \mathbb{R}$:



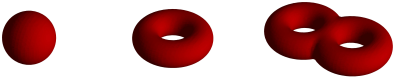
# Beispiel: Algebraische Kurven

Sei $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ein Polynom.

Betrachte

$$V(K) \;:=\; \{(x,y) \in K^2 \mid y^2 = f(x)\}.$$

Für $K = \mathbb{C}$:



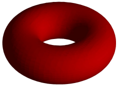
# Beispiel: Elliptische Kurven

Sei $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ein Polynom vom Grad $\deg(f) = 3$.

Betrachte

$$V(K) \;:=\; \{(x,y) \in K^2 \mid y^2 = f(x)\}.$$

Für $K = \mathbb{C}$:



Was?
Wie?
Wer?

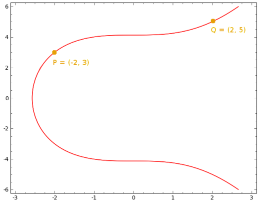
# Beispiel: Elliptische Kurven

Sei $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ein Polynom vom Grad $\deg(f) = 3$.

Betrachte

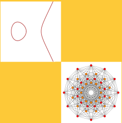
$$V(K) \ := \ \left\{(x,y) \in K^2 \mid y^2 = f(x)\right\}.$$

Gruppenstruktur:




$$y^2 = x^3 + 17$$

# Beispiel: Elliptische Kurven

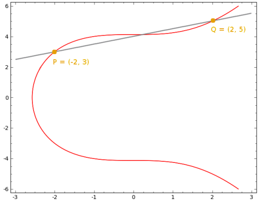


Sei $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ein Polynom vom Grad $\deg(f) = 3$.

Betrachte

$$V(K) := \{(x,y) \in K^2 \mid y^2 = f(x)\}.$$

Gruppenstruktur:




$$y^2 = x^3 + 17$$

Was?
Wie?
Wer?

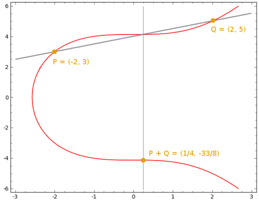
# Beispiel: Elliptische Kurven

Sei $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ein Polynom vom Grad $\deg(f) = 3$.

Betrachte

$$V(K) \;:=\; \left\{(x,y) \in K^2 \mid y^2 = f(x)\right\}.$$

Gruppenstruktur:




$$y^2 = x^3 + 17$$

Was?
Wie?
Wer?

# Beispiel: Elliptische Kurven

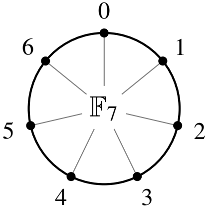
Solche *elliptischen Kurven* spielen eine wichtige Rolle in vielen Teilen der modernen Mathematik, etwa in Andrew Wiles' Beweis der Fermat-Vermutung.

# Beispiel: Elliptische Kurven

Was?
Wie?
Wer?

Solche *elliptischen Kurven* spielen eine wichtige Rolle in vielen Teilen der modernen Mathematik, etwa in Andrew Wiles' Beweis der Fermat-Vermutung.

Für $K = \mathbb{F}_p$ treten sie auch in der Kryptographie auf:



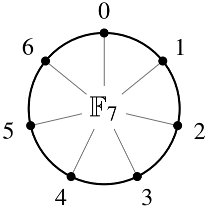

$$3 + 5 \equiv 1 \text{ in } \mathbb{F}_7$$

# Beispiel: Elliptische Kurven



Solche *elliptischen Kurven* spielen eine wichtige Rolle in vielen Teilen der modernen Mathematik, etwa in Andrew Wiles' Beweis der Fermat-Vermutung.

Für $K = \mathbb{F}_p$ treten sie auch in der Kryptographie auf:




$$3 + 5 \equiv 1 \text{ in } \mathbb{F}_7$$

In höherer Dimension heißen sie *abelsche Varietäten*.

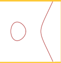
# Beispiel: Varietäten über endlichen Körpern

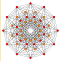
Sei $V$ eine Varietät über einem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$.

# Beispiel: Varietäten über endlichen Körpern

Sei $V$ eine Varietät über einem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$.

Was lässt sich aussagen über die Menge $V(\mathbb{F}_q)$
ihrer Punkte mit Werten in $\mathbb{F}_q$?





# Beispiel: Varietäten über endlichen Körpern



Sei $V$ eine Varietät über einem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$.

Was lässt sich aussagen über die Menge $V(\mathbb{F}_{q^n})$
ihrer Punkte mit Werten in $\mathbb{F}_{q^n}$?

# Beispiel: Varietäten über endlichen Körpern

Sei $V$ eine Varietät über einem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$.

Betrachte die Anzahl $N_n = |V(\mathbb{F}_{q^n})|$ für $n \in \mathbb{N}$.

# Beispiel: Varietäten über endlichen Körpern

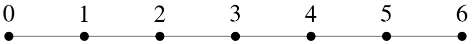


Sei $V$ eine Varietät über einem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$.

Betrachte die Anzahl $N_n = |V(\mathbb{F}_{q^n})|$ für $n \in \mathbb{N}$.

## Beispiel

- Für die affine Gerade $V = \mathbb{A}^1$ ist $N_n = q^n$.



# Beispiel: Varietäten über endlichen Körpern



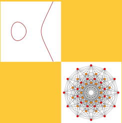
Sei $V$ eine Varietät über einem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$.

Betrachte die Anzahl $N_n = |V(\mathbb{F}_{q^n})|$ für $n \in \mathbb{N}$.

## Beispiel

- Für die affine Gerade $V = \mathbb{A}^1$ ist $N_n = q^n$.
- Für die projektive Gerade $V = \mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \{\infty\}$ ist $N_n = q^n + 1$.

# Beispiel: Varietäten über endlichen Körpern



Allgemein betrachte

$$\zeta_V(t) \;=\; \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n}{n} \cdot t^n\right).$$

# Beispiel: Varietäten über endlichen Körpern



Allgemein betrachte

$$\zeta_V(t) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n}{n} \cdot t^n\right).$$

## Beispiel

Für $V = \mathbb{P}^1$ ist

$$\zeta_V(t) = \frac{1}{(1-t)(1-qt)}.$$

# Beispiel: Varietäten über endlichen Körpern

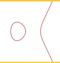
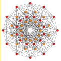
Allgemein betrachte

$$\zeta_V(t) \;=\; \exp\left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n}{n} \cdot t^n \right).$$

## Beispiel

Für elliptische Kurven $V$ existiert $a \in \mathbb{C}$, $|a| = \sqrt{q}$ mit

$$\zeta_V(t) \;=\; \frac{(1-at)(1-\overline{a}t)}{(1-t)(1-qt)}.$$

# Beispiel: Varietäten über endlichen Körpern



## Weil-Vermutungen / Satz von Deligne

Allgemein gilt

$$\zeta_V(t) = \frac{P_1(t)\cdots P_{2n-1}(t)}{P_0(t)\cdots P_{2n}(t)} \quad \text{mit} \quad P_i(t) \in \mathbb{Z}[t],$$

deren komplexe Nullstellen vom Betrag $q^{-i/2}$ sind.

# Beispiel: Varietäten über endlichen Körpern



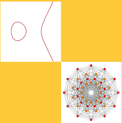
## Weil-Vermutungen / Satz von Deligne

Allgemein gilt

$$\zeta_V(t) = \frac{P_1(t)\cdots P_{2n-1}(t)}{P_0(t)\cdots P_{2n}(t)} \quad \text{mit} \quad P_i(t) \in \mathbb{Z}[t],$$

deren komplexe Nullstellen vom Betrag $q^{-i/2}$ sind.

Der Beweis benutzt Topologie: Perverse Garben...



# Beispiel: Varietäten über endlichen Körpern

Was?
Wie?
Wer?

### Weil-Vermutungen / Satz von Deligne

Allgemein gilt

$$\zeta_V(t) = \frac{P_1(t)\cdots P_{2n-1}(t)}{P_0(t)\cdots P_{2n}(t)} \quad \text{mit} \quad P_i(t) \in \mathbb{Z}[t],$$

deren komplexe Nullstellen vom Betrag $q^{-i/2}$ sind.

Der Beweis benutzt Topologie: Perverse Garben...

...aber in einem arithmetischen Kontext!

# Ihr Weg zur Bachelorarbeit

Was?
Wie?
Wer?

Monobachelor:

- Algebra und Funktionentheorie
- Algebra II
- Zahlentheorie
- ...

# Ihr Weg zur Bachelorarbeit

Was?
Wie?
Wer?

Monobachelor:

- Algebra und Funktionentheorie
- Algebra II
- Zahlentheorie
- ...

Kombibachelor:

- Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
- Algebra/Zahlentheorie (und ihre Didaktik)
- ...

# Ihr Weg zur Masterarbeit

Monomaster:

- Algebraische Geometrie I + II
- Zahlentheorie II
- Algebraische Gruppen / Liealgebren
- Arithmetische Geometrie
- Automorphe Formen / Modulformen
- ...

Was?
Wie?
Wer?

# Ihr Weg zur Masterarbeit

Monomaster:

- Algebraische Geometrie I + II
- Zahlentheorie II
- Algebraische Gruppen / Liealgebren
- Arithmetische Geometrie
- Automorphe Formen / Modulformen
- ...

Kombimaster:

- Lineare Algebra und Analytische Geometrie II
- ...

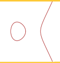
# Arbeitsgruppen und Forschungsgebiete

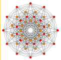
- Gavril Farkas: *Komplexe algebraische Geometrie, Moduli von Kurven und abelschen Varietäten.*

# Arbeitsgruppen und Forschungsgebiete

- Gavril Farkas: *Komplexe algebraische Geometrie, Moduli von Kurven und abelschen Varietäten.*
- Elmar Große-Klönne: *Algebraische Varietäten über lokalen Körpern und p-adische Darstellungstheorie.*

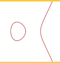
# Arbeitsgruppen und Forschungsgebiete

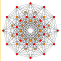




- Gavril Farkas: *Komplexe algebraische Geometrie, Moduli von Kurven und abelschen Varietäten.*
- Elmar Große-Klönne: *Algebraische Varietäten über lokalen Körpern und p-adische Darstellungstheorie.*
- Bruno Klingler: *Hodgetheorie und transzendente Eigenschaften von Familien algebraischer Varietäten.*

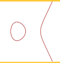
# Arbeitsgruppen und Forschungsgebiete

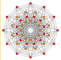




- Gavril Farkas: *Komplexe algebraische Geometrie, Moduli von Kurven und abelschen Varietäten.*
- Elmar Große-Klönne: *Algebraische Varietäten über lokalen Körpern und p-adische Darstellungstheorie.*
- Bruno Klingler: *Hodgetheorie und transzendente Eigenschaften von Familien algebraischer Varietäten.*
- Jürg Kramer: *Arakelov-Geometrie und analytische Zahlentheorie automorpher Formen.*

# Arbeitsgruppen und Forschungsgebiete





- Gavril Farkas: *Komplexe algebraische Geometrie, Moduli von Kurven und abelschen Varietäten.*
- Elmar Große-Klönne: *Algebraische Varietäten über lokalen Körpern und p-adische Darstellungstheorie.*
- Bruno Klingler: *Hodgetheorie und transzendente Eigenschaften von Familien algebraischer Varietäten.*
- Jürg Kramer: *Arakelov-Geometrie und analytische Zahlentheorie automorpher Formen.*
- TK: *Geometrie und Arithmetik abelscher Varietäten, perverse Garben und Darstellungstheorie.*

# Arbeitsgruppen und Forschungsgebiete



Interesse oder weitere Fragen?

Kommen Sie einfach bei uns vorbei!