

Übungsaufgaben zur Vorlesung
 COMA (S 14)
 Serie 10

Abgabe bis 07.07.2014

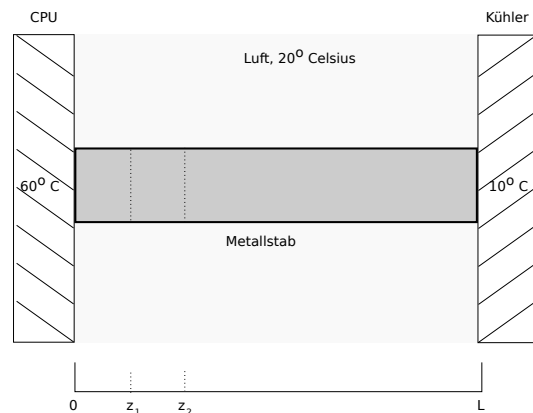
Aufgabe 10.1: (20 Punkte)

Tim C. ist mit der Entwicklung eines neuen Computers beschäftigt. Besonders interessiert ihn die Wärmeentwicklung an dem Kühler des Prozessors. Unter Vollast hat die CPU eine Temperatur von 60°C . Der Prozessor wird von einem Aggregat gekühlt, welches konstant 10°C hat und über eine Metallleiste der Länge $L = 1.0\text{m}$ mit der CPU verbunden ist. Die Umgebungsluft der Metallleiste hat eine Zimmertemperatur von $x_c = 20^\circ\text{C}$.

Helfen Sie Tim bei der Modellierung der Temperaturverteilung in der Leiste. Betrachten Sie dazu das 1-dimensionale Modell der stationären Wärmeleitung mit Randwerten gegeben durch:

$$-\frac{d^2x(z)}{dz^2} = -\gamma(x(z) - x_c), \quad x(0) = 60, \quad x(L) = 10$$

Hierbei, beschreibe $x(z) \in \mathbb{R}$ die Temperatur der Leiste und die rechte Seite der Gleichung den Wärmeaustausch zwischen der Leiste und der umgebenden Luft an der Position $z \in [0, L]$. Der Übergangskoeffizient ist durch $\gamma = 25\text{m}^{-2}$ gegeben.



Benutzen Sie eine äquidistante Diskretisierung mit $n + 1$ Stützstellen $z_0 = 0, z_1, \dots, z_n = L$ und formulieren Sie das Finite-Differenzen-Modell, das heißt approximieren Sie

$$x(z_i) \approx x_i \quad \text{und} \quad \frac{d^2x(z)}{dz^2} \approx \frac{1}{h^2} (x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n - 1.$$

wobei $z_i = z_{i-1} + h$ mit Schrittweite $h = 1/n$.

Formulieren das lineare Gleichungssystem mit den Randwerten und lösen Sie das entstehende tridiagonale System für $n = 5, 10, 20, 100$ mit der Jacobi-Methode aus der Vorlesung. Visualisieren Sie ihre Lösungen z.B. mit Gnuplot.

Zusatzaufgabe: Wiederholen Sie die Berechnung mit der symmetrischen Seidel-Methode.