HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Institut für Mathematik
Prof. PhD. A. Griewank

Mathematik für Informatiker III
– WS 07/08 –
Übungsblatt 1

Abgabe 05.11.2007

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion im Intervall $[-10, 10]$.

b) Bestimmen Sie die Iterationsvorschrift zur Berechnung einer Nullstelle von F mit dem Newton-Verfahren.

c) Berechnen Sie für den Startwert $x_0 = \frac{1}{2}$ die Iterationswerte $x_1, \ldots, x_5$ des Newton-Verfahrens.

d) Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren für Startwerte mit $|x| > 1$ nicht konvergiert.

e) Was passiert für $|x| = 1$?

Aufgabe 2:

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass unter den Standardvoraussetzungen des Newton-Verfahrens an F und für Iterierte x_k hinreichend nahe bei einer Nullstelle x_* die Abschätzungen:

$$\frac{4}{5} \leq \frac{|F(x_k)|}{|x_k - x_*||F'(x_*)|} \leq \frac{6}{5} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

sowie

$$|x_{k+1} - x_*| \leq C|x_k - x_*|^{\alpha+1} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

erfüllt sind.

Beweisen Sie, dass dann auch gilt:

$$|F(x_{k+1})| \leq \tilde{C}|F(x_k)|^{\alpha+1} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 3:

a) Schreiben Sie ein Programm, welches das Newtonverfahren implementiert. Dabei sind folgende Parameter interessant: die Funktion $F(x)$ sowie deren Ableitung, der Startpunkt x_0, die maximale Anzahl der durchzuführenden Iterationen k_{max} und die Fehlertoleranz tol.

Es soll dafür ein Unterprogramm

```
eval(x,F,Fp)
```

geben, das am gegebenen Eingabepunkt x die Werte von F und Fp berechnet und zurück gibt. Dieses wird dann im Hauptprogramm aufgerufen und kann jeweils modifiziert werden um die verschiedenen Tests auszuführen. (Sie sollten auch mit Hilfe von finiten Differenzen testen, dass die Ableitungen stimmen.)

Das Verfahren terminiere, falls $|F(x_k)| \leq tol$ oder $k \geq k_{max}$. Ausgegeben werden soll der letzte Iterationspunkt x_k, die Anzahl der benötigten Iterationen k und der Funktionswert $F(x_k)$ bzw. ein Hinweis auf den Erfolg oder Misserfolg des Verfahrens.

Den Pseudocode Ihres Programms geben Sie bitte mit den Lösungen der folgenden Teilaufgaben ab.

b) Testen Sie Ihr Programm an den folgenden Funktionen:

- $F_1(x) := x^2 - 2x$ für Startpunkte $x_0 \in \{0, 4, 10\}$;
- $F_2(x) := cos(x/2)$ für Startpunkte $x_0 \in \{0, 2, 2\pi\}$;
- $F_3(x) := \begin{cases} -\frac{x^2}{2} - 10x & x < 0 \\ \frac{x^2}{2} - 10x & x \geq 0 \end{cases}$ für Startpunkte $x_0 \in \{0, 100\}$;
- $F_4(x) := x(1 + \sqrt{|x|})$ für Startpunkte $x_0 \in \{0, 1\}$;
- $F_5(x) := x^2$ für Startpunkte $x_0 \in \{10, 1\}$;
- $F_6(x) := 5x - x^3$ für Startpunkte $x_0 \in \{-1, \frac{1}{2}, 1\}$;

und werten Sie die Ausgaben aus (Ein- und Ausgaben dokumentieren!).

c) Testen Sie das Programm außerdem für weitere sinnvolle Startwerte Ihrer Wahl und erklären Sie dessen Verhalten für die obigen Funktionen.

d) Lassen Sie auch ihr Programm zusätzlich noch $\log(|F(x_{k+1})|/\log(|F(x_k)|)$ berechnen – dies sollte gegen die Konvergenzordnung des Newtonverfahrens für die entsprechende Funktion konvergieren.