Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. PhD. A. Griewank

Mathematik für Informatiker III
– WS 07/08 –
Übungsblatt 4

Abgabe bis 17. Dezember 2007

Aufgabe 1: Interpolation – Lagrange-Polynom, kubische Splines und Ausgleichsprobleme

1. Berechnen Sie zu den Wertepaaren (x_i, y_i) mit den Stützstellen $x_i = -0.6+0.2\cdot i$, $i = 0, \ldots, 6$ und den Mess- bzw. Funktionswerten $y_i = 2^{x_i}$ jeweils
   (i) das interpolierende Lagrange-Polynom;
   (ii) den natürlichen kubischen Spline;

   und stellen Sie die erhaltene Approximation grafisch dar.

   Geben Sie außerdem das tridiagonale Gleichungssystem des kubischen Splines mit dem zugehörigen Lösungsvektor $z = (z_1, \ldots, z_5)^T$ an.

2. Stören Sie den Meßwert y_6 durch Addition von 0.1 und berechnen Sie zu den gestörten Daten wiederum Lagrange-Polynom und natürlichen kubischen Spline und visualisieren Sie die Approximationen.

   Untersuchen Sie nun die Auswirkung der Störung auf die Approximationen: Erstellen Sie dazu eine Tabelle mit den Werten der Approximationen für die nicht gestörten Daten (Spalte 1), die gestörten Daten (Spalte 2) und den Betrag der Differenzen beider (Spalte 3) an den Zwischenstellen $\{-0.45, -0.2, -0.05, 0.05, 0.2, 0.45\}$ und interpretieren Sie die Reaktion der Approximationen auf die Störung der Daten.

Zusatzaufgabe: Entwickeln Sie einen Algorithmus, der das bei der Interpolation mit kubischen Splines entstehende lineare symmetrische tridiagonale Gleichungssystem mit n Gleichungen in n Unbekannten mit nur $O(n)$ Divisionen löst!

Hinweis: Die Berechnung der Approximationen können Sie dem Rechner überlassen.

Aufgabe 2: Numerische Integration

Berechnen Sie mit doppelter Genauigkeit Näherungen für den Wert der Integrale

$$\int_0^{\pi/2} e^{2x}\sin(x)dx \qquad \text{und} \qquad \int_0^1 \sqrt{x^7}dx$$

mit

(i) der summierten Trapezregel.

(ii) der Simpsonregel.

Verwenden Sie als Abbruchkriterium bei Trapez- und Simpson-Regel

$$|T_{2^k} - T_{2^{k-1}}| \leq \delta|T_2| \quad \text{bzw.} \quad |S_{2^k} - S_{2^{k-1}}| \leq \delta|S_2|$$

mit $\delta = 10^{-12}$.
Erstellen Sie für beide Integranden eine Tabelle, in der für jedes $k = 1, 2, \ldots$ (bis zum Abbruch des jeweiligen Verfahrens) die berechneten Werte T_{2^k} und S_{2^k} angegeben sind. Geben Sie in einer zweiten Tabelle für jeden Integranden den jeweiligen Fehler zum exakten Integral an (Hinweis: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin(x)dx = \frac{2e^{\pi}+1}{5}$; $\int_0^1 \sqrt{x^7}$ selbst bestimmen.) und vergleichen Sie die beiden Tabellen. Interpretieren Sie die beobachteten Unterschiede.
Erstellen Sie für jeden Integranden ein Diagramm, in dem der negative Logarithmus des Fehlers von Trapez- und Simpsonregel zum exakten Wert des Integrals über dem jeweiligen k der zugehörigen Schrittweite h_k dargestellt wird. D.h., falls I der exakte Wert des jeweiligen Integrals ist, so sind (so weit vorhanden) die Werte

$$-\log|T_{2^k} - I|, \qquad -\log|S_{2^k} - I|$$

für $k = 1, 2, \ldots$ zu plotten. Welche Bedeutung könnten diese Werte haben? Bewerten Sie das Verhalten des Graphen.

Zusatzaufgabe: Bei der Berechnung der Trapezregel mit halbierter Schrittweite $h_k = h_{k-1}/2$ kann der Berechnungsaufwand gesenkt werden, indem bei Schrittweite h_{k-1} berechnete Werte wieder genutzt werden. Geben Sie eine Formel zur Berechnung von T_{2^k} unter Verwendung von $T_{2^{k-1}}$ an.