Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. PhD. A. Griewank

Mathematik für Informatiker III
– WS 07/08 –
Übungsblatt 6

Abgabe bis 7. Februar 2008

Aufgabe 1: Gegeben Seien die Zufallsvariablen X,Y mit Werten in $\{-1, 1\}$ bzw. $\{0, 1, 2\}$. Die Verteilung der Paare (X, Y) ist durch die Matrix A gegeben.

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass A ein zulässige Verteilung von (X, Y) beschreibt, bestimme die sich daraus ergebende Verteilung von X und Y! (Was sind die Verteilungen von X und Y?)

b) Überprüfen Sie, ob die Zufallsvariabeln unabhängig sind!

c) Berechnen Sie die Erwartungswerte von $X, Y, X + Y$ und $Y X$!

d) Vergleichen Sie die Werte $EX \cdot EY$ und $E(X \cdot Y)$! Was fällt auf und warum?

Aufgabe 2: Betrachte die Münzwurfereignisräume $\Omega_i = \{0, 1\}$ mit konstanten Wahrscheinlichkeiten p und $q = 1-p$ in jedem i-ten Wurf. Das Ergebnis von zwei Würfen bildet den Produktraum $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.

a) Bestimme alle Elementarereignisse in Ω und bilde daraus alle Teilmengen, also die Elemente der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$. Diese können hier noch alle aufgelistet werden.

   Benenne ihre Wahrscheinlichkeit unter der Voraussetzung, dass die beiden Würfe stochastisch unabhängig sind.

b) Für jedes Paar von Teilmengen $A_i \subset \Omega_i$ mit $i = 1, 2$ erhält man eine Produktmenge

$$A_1 \times A_2 = \{(\omega_1, \omega_2) | \omega_i \in A_i \text{ für } i = 1, 2\} \subset \Omega$$

   Beachte hierbei, dass die Produktmenge laut Definition leer ist, wenn einer der beiden Faktoren A_i leer ist. Bestimme alle Teilmengen von Ω – also Elemente von $\mathcal{P}(\Omega)$ – die sich auf diese Weise bilden lassen.

   Benenne die Elemente des Komplementes in $\mathcal{P}(\Omega)$, d.h. die Teilmengen von Ω, die sich nicht als Produkte darstellen lassen.

Wir haben damit am Beispiel gezeigt, dass die Potenzmenge eines Mengenproduktes (im allgemeinen wesentlich) größer ist als das Produkt der Potenzmengen der Faktoren.

Aufgabe 3: Sie fliegen von Berlin nach Santiago de Chile und steigen in Frankfurt und São Paulo um. An jedem Flughafen, inklusive Berlin, muss ihr Koffer verladen werden. Dabei wird er mit Wahrscheinlichkeit p fehlgeleitet. In Santiago de Chile stellen Sie fest, dass ihr Koffer nicht angekommen ist. Berechnen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten dafür, dass er in Berlin bzw.

Frankfurt bzw. São Paulo fehlgeleitet wurde! (Formulieren Sie auch einen Wahrscheinlichkeitsraum!)

Aufgabe 4: Sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, A, B, C Ereignisse aus Ω.
Zeigen Sie ...

a) ... sind A, B unabhängig, so auch A, B^C!

b) ... sind A, B, C unabhängig, so auch $A \cup B, C$!

Aufgabe 5:(Würfelpardox) Zwei Würfel W_1 und W_2 seien wie folgt beschriftet

$$W_1: \ 6\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3 \quad W_2: \ 5\ 5\ 5\ 2\ 2\ 2$$

Anton und Birgitte würfeln mit W_1 und W_2. Wer die höhere Augenzahl erziehlt, hat gewonnen.

a) Zeigen Sie, dass Anton die besseren Gewinnchancen hat; wir schreiben dafür $W_1 \succ W_2$!

b) Brigitte bemerkt dies und schlägt Anton vor: „Ich beschrifte einen dritten Würfel. Du darfst dir dann einen beliebigen Würfel aussuchen und ich wähle mir einen der beiden anderen. "Kann Brigitte den dritten Würfel so beschriften, dass sie in jedem Fall die besseren Gewinnchancen hat(d.h. so dass $W_1 \succ W_2 \succ W_3 \succ W_1$, also die Relation $\succ$ nicht transitiv ist)?

Aufgabe 6:(Poisson-Approximation) Einem Drucker unterläuft im Durchschnitt ein Fehler auf 1000 Buchstaben und eine Buchseite hat 2000 Buchstaben. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten, dass auf einer Buchseite $0, \ldots, 6$ oder mehr als 7 Druckfehler sind. (Vergleichen Sie Binomial- und Poisson-Verteilung!)

Aufgabe 7: Aus einer Urne mit Kugeln, die mit Nummern $1, \ldots, N$ nummeriert sind, ziehen wir ohne Zurücklegen n Kugeln. Mit X bezeichnen wir die kleinste gezogene Nummer. Bestimme die Verteilung von X.

Aufgabe 8: Transport von Gold unter unsicheren Bedingungen In einem Krisengebiet soll Gold im Wert von \$1.000.000 transportiert werden. Die Wahrscheinlichkeit für einen Überfall wird auf 0.1 geschätzt. Wird ein Transport überfallen, so ist das gesamte transportierte Gold verloren. Es werden nun zwei Strategien erwogen:

A: Man transportiert alles Gold auf einmal.

B: Man teilt das Gold auf 5 gleich große Teile auf und führt 5 Transporte mit jeweils einem Teil durch.

Berechnen Sie für beide Strategien den Erwartungswert für den Verlust durch Überfälle und entscheiden Sie, welche Strategie die günstigere ist.