Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. PhD. A. Griewank
Dr. L. Lehmann; Dipl.-Math. Carsten Falk

Übungsaufgaben zur Analysis IIIa (WS 09/10)
Serie 1

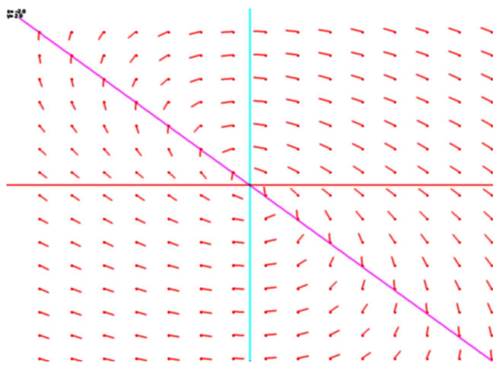
Abgabe am Mo., 26. Oktober vor der Vorlesung

Aufgabe 1.1: *4 Punkte*

Skizzieren Sie das Richtungsfeld für das Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2\,(2x_1 - x_2) \end{pmatrix}$$

im Bereich $(x_1, x_2) \in [-2, 2]^2$ Bestimmen Sie dazu die Kurven horizontalen Anstiegs ($\dot{x}_2 = 0$), vertikalen Anstiegs ($\dot{x}_1 = 0$) sowie diagonalen Anstiegs ($\dot{x}_1 = \pm\dot{x}_2$) und füllen Sie die Lücken.
Hinweis: Beim Skizzieren der Richtung wird an jeden Punkt ein kurzer Pfeil konstanter Länge angetragen.



Richtungsfeld für $\dot{x}_1 = -x_1 - x_2$, $\dot{x}_2 = x_1$.
Erzeugt mit Java-Applet von
`http://www.math.psu.edu/melvin/phase/newphase.html`

Aufgabe 1.2: *4 Punkte*

1. Die Differentialgleichung (ODE) des angeregten harmonischen Oszillators (bzw. des mathematischen Pendels) ist $\ddot{x}(t) + \alpha^2 x(t) = \sin(\omega t)$. Bestimmen Sie jeweils ein äquivalentes zeitabhängiges und ein autonomes System erster Ordnung. Welche Anfangswerte müssen jeweils vorgegeben werden, um ein vollständiges Anfangswertproblem zu erhalten?

2. Eine (gleitende) Bewegung mit Reibung $k \in \mathbb{R}_+$ eines Körpers der Masse $m > 0$ unter einer konstanten Kraft $F \in \mathbb{R}_+$ (z.B. auf einer schiefen Ebene) wird durch die ODE $m\ddot{x} + k\dot{x} - F = 0$ beschrieben. Finden Sie ein äquivalentes autonomes System erster Ordnung.

   Transformieren Sie diese ODE und formulieren Sie ein Anfangswertproblem, welches zur Lösung folgender Fragestellung dient: Wie muss man die Anfangsgeschwindigkeit wählen, damit nach einer vorgegebenen Zeit $\Delta t > 0$ der Körper zur Ruhe kommt?

Aufgabe 1.3: *2 Punkte*

Geben Sie eine vom Parameter $c \in \mathbb{R}$ unabhängige Differentialgleichung erster Ordnung an, welche die Funktionen $x_c(t) = ct^2 + c$ als Lösungen hat. Welches zugehörige Anfangswertproblem hat für ein vorgegebenes $c \in \mathbb{R}$ die Funktion x_c zur Lösung?

Zusatz: Gibt es eine autonome Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche (unter anderem) diese Funktionen als Lösungen besitzt?

Aufgabe 1.4: *4 Punkte*

Eine ODE der Form $\dot{x} = f(x)g(t)$ mit stetigen Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kann mit der Methode der Trennung der Veränderlichen gelöst werden. Dazu bestimmt man Stammfunktionen F von $1/f$ und G von g und löst die implizite Gleichung $F(x(t)) - G(t) = C$ für beliebig vorgegebene Integrationskonstanten $C \in \mathbb{R}$ nach $x(t)$.

Bestimmen Sie die sich aus dieser Methode ergebenden Lösungen der Anfangswertprobleme

$$a)\ \dot{x} = xt,\ x(1) = -1 \quad b) \dot{x} = \frac{x}{t},\ t > 0,\ x(1) = 2 \quad c)\ \dot{x} = -\frac{x}{\tanh(t)},\ t > 0,\ x(2) = 10\,.$$

Hinweis: Vermeiden Sie Divisionen durch Null. Prüfen Sie die gefundenen Lösungen durch Differenzieren und Einsetzen.