HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. PHD. A. GRIEWANK
DR. L. LEHMANN; DIPL.-MATH. CARSTEN FALK

Übungsaufgaben zur Analysis IIIa (WS 09/10)
Serie 2

Abgabe am Mo., 2. November vor der Vorlesung

Aufgabe 2.1: *4 Punkte*

Zur Lösung einer linearen Differentialgleichung (ODE) erster Ordnung

$$\dot{x}(t) + g(t)x(t) = h(t)$$

mit stetigen Funktionen $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bestimmt man als erstes eine Stammfunktion G von g. Der Ansatz $c(t) = e^{G(t)}\,x(t)$, oder äquivalent $x(t) = e^{-G(t)}\,c(t)$ führt dann auf die Integrationsaufgabe

$$\dot{c}(t) = e^{G(t)}\,(\dot{x}(t) + g(t)x(t)) = e^{G(t)}\,h(t)\,.$$

Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Umformung die Lösungen der IVPs

a) $\dot{x}(t) - 2x(t) = -t,\, x(0) = \frac{1}{4}$, *b)* $\dot{x}(t) - \sin(t)\,x(t) = \sin(2t),\, x(0) = 0$, *c)* $\dot{x}(t) - t\,x(t) = t,\, x(0) = 0\,.$

Aufgabe 2.2: *4 Punkte*

Eine Bernouilli–Differentialgleichung hat die Form

$$0 = \dot{x}(t) + g(t)x(t) + h(t)x(t)^{\alpha}, \quad \alpha \neq 1\,.$$

Sie wird mit dem Ansatz $u(t) = x(t)^{1-\alpha}$ für $x(t) > 0$ in eine lineare ODE umgeformt.

Bestimmen Sie die sich aus diesem Ansatz ergebenden Lösungen der Bernouilli–ODEs im ersten Quadranten, d.h. für $t > 0$ und $x(t) > 0$

$$a)\; 0 = \dot{x}(t) + \frac{x(t)}{2t} - \frac{1}{x(t)}, \quad b)\; 0 = \dot{x}(t) + (t - \tfrac{1}{t})x(t) + \frac{t\,e^{-t^2}}{x(t)}$$

Aufgabe 2.3: *4 Punkte*

Eine Riccati–Differentialgleichung hat die allgemeine Form

$$\dot{x}(t) = f(t) + g(t)x(t) + h(t)x(t)^2\,.$$

Sie kann im Allgemeinen nur dann symbolisch gelöst werden, wenn eine Lösung x_p schon bekannt ist. Dann führt der Ansatz $x(t) = x_p(t) + u(t)$ auf eine Bernoulli–DGl.

1. Bestimmen Sie die Bernoulli–DGl. für u im allgemeinen Fall.

2. Bestimmen Sie die sich aus diesem Ansatz ergebende Lösung der Riccati—DGl.

$$\dot{x}(t) = (1-t)\,x(t)^2 + (2t-1)\,x(t) - t\,,$$

welche durch den Nullpunkt verläuft, d.h. $x(0) = 0$. Dabei ist bekannt, dass $x_p(t) \equiv 1$ eine Lösung der DGl. ist.

Aufgabe 2.4: *4 Punkte*

Eine homogene Differentialgleichung wie

$$\dot{x}(t) = \frac{x(t) + 2t}{2x(t) + t}, \qquad 2x(t) + t \neq 0$$

wird durch den Ansatz $x(t) = t\,u(t)$ in eine separable Differentialgleichung für u transformiert. Nach Partialbruchzerlegung kann eine Lösung jedoch meist nur implizit angegeben werden.

Führen Sie diese Umformung für diese homogene DGl. durch und finden Sie die implizite Form der allgemeinen Lösung. Spezifizieren Sie die Integrationskonstante für die Anfangsbedingung $x(1) = 0$ und geben Sie den maximalen Definitionsbereich für eine Lösung dieses Anfangswertproblems an.