HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. PHD. A. GRIEWANK
DR. L. LEHMANN; DIPL.-MATH. CARSTEN FALK

Übungsaufgaben zur Analysis IIIa (WS 09/10)
Serie 3

Abgabe am Mo., 9. November vor der Vorlesung

Aufgabe 3.1: Weißingerschen Fixpunktsatz *4 Punkte*

Seien $M \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge eines Banachraumes X und $F : M \to M$ eine Lipschitz–stetige Abbildung. Die Verknüpfungen dieser Abbildung mit sich selbst seien mit F^n bezeichnet, dabei ist $F^1 = F$ und $F^{n+1} = F \circ F^n$. Es existiere für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Lipschitz–Konstante $\alpha_n > 0$ von F^n, so dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$ konvergiert.

Zeigen Sie, dass, analog zum Banachschen Fixpunktsatz (der ein Spezialfall dieses Satzes ist), F in M genau einen Fixpunkt besitzt. Weisen Sie dazu nach, dass für beliebige $x_0 \in M$ die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = F^n(x_0)$ eine Cauchy–Folge ist. Schließen Sie auf Konvergenz und Eindeutigkeit des Grenzwertes. Geben Sie eine Abschätzung für den Abstand von x_n zum Grenzwert an.

Aufgabe 3.2: *4 Punkte*

Beweisen Sie mittels des Weißingerschen Fixpunktsatzes den Satz von Picard–Lindelöf. Dazu wird wieder das Anfangswertproblem $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = a$ für eine Lipschitz–stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ auf einem Intervall $I = (-T, T)$ betrachtet.

Weisen Sie dazu insbesondere nach, dass die n–ten Potenzen des Integraloperators

$$G : C(I, \mathbb{R}^n) \to C(I, \mathbb{R}^n), \quad G(x)(t) = a + \int_0^t f(x(s))\, ds \text{ für alle } x \in C(I, \mathbb{R}^n),\ t \in I,$$

die Lipschitz-Konstanten $\alpha_n = \frac{(LT)^n}{n!}$ besitzen.

Vergleichen Sie die Fehlerabschätzungen nach diesem Vorgehen mit denen aus dem Beweis mit der modifizierten Supremumsnorm.

Aufgabe 3.3: *4 Punkte*

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden linearen Differentialgleichungen:

$$a)\ \dot{x} = 2x + 1 + t^2, \quad b)\ \dot{x} = 3x + e^{2t}, \quad c)\ \dot{x} = x + t\cos(2t), \quad d)\ \dot{x} = -x - te^{-t}.$$

Aufgabe 3.4: *4 Punkte*

Bestimmen Sie die maximalen Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme (homogener Differentialgleichungen)

$$a)\ t\dot{x} = x - t - te^{-\frac{x}{t}}, \qquad x(1) = 0,$$

$$b)\ \dot{x} = \frac{x^2 - t^2}{xt}, \qquad x(1) = 1,$$

$$c)\ \dot{x} = (x+t)^2, \qquad x(0) = 0.$$