HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. PHD. A. GRIEWANK
DR. L. LEHMANN; DIPL.-MATH. CARSTEN FALK

Übungsaufgaben zur Analysis IIIa (WS 09/10)
Serie 4

Abgabe am Mo., 16. November vor der Vorlesung

Aufgabe 4.1: *4 Punkte*

Auf dem Quadrat $R = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : \ |t| \leq 1, |x| \leq 1\}$ sei die Funktion $f : R \to \mathbb{R}$ definiert als

$$f(t,x) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } t = 0,\ |x| \leq 1, \\ 2t, & \text{wenn } 0 < |t| \leq 1,\ -1 \leq x < 0, \\ 2t - 4x/t, & \text{wenn } 0 < |t| \leq 1,\ 0 \leq x \leq t^2, \\ -2t, & \text{wenn } 0 < |t| \leq 1,\ t^2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen für den Satz von Peano erfüllt sind, genauer, dass f auf dem Quadrat R stetig und im Betrage durch 2 beschänkt ist. (Eine Skizze zur Fallunterscheidung kann hilfreich sein.)

(b) Zeigen Sie, dass f keine Lipschitz–Bedingung auf R erfüllt.

(c) Zeigen Sie, dass die Picard–Iteration für das IVP mit $x(0) = 0$ von $x_0(t) = 0$ ausgehend alternierend $x_{2n-1}(t) = +t^2$ und $x_{2n}(t) = -t^2$ für $n = 1, 2, \ldots$ erzeugt.

(d) Weisen Sie nach, dass keine der konvergenten Teilfolgen in Aufgabe (c) gegen eine Lösung des IVP konvergiert.

Aufgabe 4.2: *4 Punkte*

Betrachten Sie die Familie von Anfangswertproblemen $\dot{x} = f(t,x) = t^m$, $x(0) = 1$, für beliebiges $m \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie für die Verfahren von Euler, Heun und Runge-Kutta den Unterschied zwischen der exakten Lösung des Anfangswertproblems und dem ersten Schritt des jeweiligen Verfahrens, d.h. zwischen $x(h)$ und x_1 bei Schrittweite $h > 0$. Bis zu jeweils welchem m stimmen numerische und exakte Lösung überein?

Aufgabe 4.3: (Mit Serie 5 am 23.11. abzugeben.) *4 Punkte+2 Zusatzpunkte*

Betrachten Sie das Anfangswertproblem $\dot{x} = f(t,x) = x + t^2$, $x(0) = 1$.

(a) Bestimmen Sie die exakte Lösung.

(b) Bestimmen Sie numerische Approximationen für $x(1)$ mittels der Verfahren von Euler und Heun. Benutzen Sie dafür Schrittweiten $h = 0,2$ und $h = 0,1$. (In den Ergebnistabellen sollen nur die Werte für $t = 0.2 * k$, $k = 1, 2, \ldots, 5$ aufgeführt werden.)

(c) Bestimmen Sie den Fehler zur exakten Lösung und wie er sich unter (dieser) Schrittweitenhalbierung verändert.

Zusatzaufgabe: Beziehen Sie das Verfahren von Runge-Kutta und die nochmals halbierte Schrittweite $h = 0,05$ in diese Untersuchung ein.

Hinweis: Die numerischen Werte könnten z.B. mit Hilfe einer Tabellenkalkulation gewonnen werden. Dazu werden alle Zwischenergebnisse eines Verfahrensschrittes in einer Tabellenzeile organisiert und der neu bestimmte Funktionswert per Verweis in die nächste Zeile übertragen.
Beim direkten Programmieren sollten Prozeduren für Aufrufe der Art `v=f(t,x)` und `xneu=euler_schritt(t,x,h)` bzw. `xneu=heun_schritt(t,x,h)` definiert werden. Im Hauptprogramm kann dann in einer Schleife die Tabelle der Funktionswerte ausgegeben werden.

Bitte wenden.

Für nichtautonome (Systeme von) IVP erster Ordnung $\dot{x} = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ wird die Näherung x_1 von $x(t_0+h)$ wie folgt in den in der Vorlesung angesprochenen Verfahren bestimmt (die Schritte von x_n zu x_{n+1} folgen demselben Schema):

a) Euler–Verfahren	b) Verf. von Heun	c) modifiziertes Euler–Verf.	d) klassisches Runge–Kutta–Verf.
$K_1 = f(t_0, x_0)$	$K_1 = f(t_0, x_0)$ $K_2 = f(t_0 + h, x_0 + hK_1)$	$K_1 = f(t_0, x_0)$ $K_2 = f(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}hK_1)$	$K_1 = f(t_0, x_0)$ $K_2 = f(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}hK_1)$ $K_3 = f(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}hK_2)$ $K_4 = f(t_0 + h, x_0 + hK_3)$
$x_1 = x_0 + hK_1$	$x_1 = x_0 + h\left(\frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}K_2\right)$	$x_1 = x_0 + hK_2$	$x_1 = x_0 + h\left(\frac{1}{6}K_1 + \frac{1}{3}K_2 + \frac{1}{3}K_3 + \frac{1}{6}K_4\right)$

Animierte Beispiele verschiedener Verfahren bei verschiedenen Schrittweiten:
`http://math.fullerton.edu/mathews/a2001/Animations/Animations9.html`

Aufgabe 4.4:

2 Punkte

Zeigen Sie, dass das ODE-System erster Ordnung

$$\dot{x}_1 - \lambda_1 x_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 - \lambda_2 x_2 = f(t), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

äquivalent ist zu einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = f(t)$$

für $x = x_1$. In welcher Beziehung stehen die Koeffizientenpaare (p,q) und (λ_1, λ_2), wie lauten die Umrechnungsvorschriften in beide Richtungen, wenn zusätzlich $p^2 > 4q$ vorausgesetzt wird?

Extra-Aufgabe 4.5:

4 Zusatzpunkte

Bestimmen Sie aus dem System erster Ordnung eine allgemeine Lösungsformel für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Dazu wird zuerst die zweite Gleichung nach x_2 gelöst und danach das gefundene x_2 als Inhomogenität in die erste Gleichung eingesetzt.

Hinweis: Reduzieren Sie evtl. auftretende Doppelintegrale mit Hilfe der partiellen Integration auf einfache Integrale.

Aufgabe 4.6:

2 Punkte

Transformieren Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 1 + t,$$

auf das oben angegebene System erster Ordnung und bestimmen Sie deren allgemeine Lösung.