HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. PHD. A. GRIEWANK
DR. L. LEHMANN; DIPL.-MATH. CARSTEN FALK

Übungsaufgaben zur Analysis IIIa (WS 09/10)
Serie 5

Abgabe am Mo., 23. November vor der Vorlesung

Aufgabe 5.1: = Aufgabe 4.3)

Aufgabe 5.2: *4 Punkte*

Lösen Sie die Anfangswertprobleme per Bestimmung der Fundamentalsysteme und Variation der Konstanten:

$$\begin{array}{lrl} a) & \ddot{x}-x=e^t-2e^{-2t}, & x(0)=1,\ \dot{x}(0)=0, \\ b) & \ddot{x}+\dot{x}-2x=\cos(2t), & x(0)=0,\ \dot{x}(0)=-1. \end{array}$$

Aufgabe 5.3: *4 Punkte*

Betrachten Sie die Matrizen

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},$$

Bestimmen Sie die allgemeine Form der Potenzen A^n, B^n, C^n und damit die Matrixexponentiale $\exp(tA)$, $\exp(tB)$ und $\exp(tC)$. Prüfen Sie, dass in diesem Fall trotz $A=B+C$

$$\exp(tA)\neq\exp(tB)\exp(tC)$$

gilt.

Aufgabe 5.4: *6 Punkte*

Zeigen Sie:

- Ist $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ nilpotent, d.h., $A^m=0$ für ein $m\in\mathbb{N}$, dann sind die Komponenten von $\exp(tA)$ Polynome mit Graden kleiner n.
- Sind $A\in\mathbb{R}^{m\times m}$ und $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ quadratische Matrizen, so gilt für die zusammengesetzte Matrix $C=\operatorname{diag}(A,B)$
$$\exp(tC)=\exp\begin{pmatrix}tA&0\\0&tB\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\exp(tA)&0\\0&\exp(tB)\end{pmatrix}.$$
- Kommutieren die Matrizen $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $AB=BA$, dann gilt für deren Exponentiale $\exp(t(A+B))=\exp(tA)\exp(tB)$. Vergleichen Sie dazu die Reihenentwicklung der linken Seite mit dem Cauchy-Produkt der rechten Seite. An welcher Stelle wird die Voraussetzung kommutierender Matrizen wesentlich?