HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. PHD. A. GRIEWANK
DR. L. LEHMANN; DIPL.-MATH. CARSTEN FALK

Übungsaufgaben zur Analysis IIIa (WS 09/10)
Serie 6

Abgabe am Mo., 30. November vor der Vorlesung

Aufgabe 6.1: *4 Punkte+2 Zusatzpunkte*

Zeigen Sie, dass die in Aufgabe 4.1 definierte Differentialgleichung $\dot{x} = f(t,x)$ definiert durch die Funktion $f : R \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t,x) = \begin{cases} 2t, & \text{wenn } |t| \leq 1,\ -1 \leq x \leq 0, \\ 2t - 4x/t, & \text{wenn } |t| \leq 1,\ 0 < x < t^2, \\ -2t, & \text{wenn } |t| \leq 1,\ t^2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

im Quadrat $R = [-1,1]^2$ ohne Nullpunkt, d.h. $R \setminus \{(0,0)\}$, lokal Lipschitz–stetig ist. Bestimmen Sie die maximalen Lösungen der Anfangswertprobleme mit a) $x(0) = \frac{1}{2}$, b) $x(0) = -\frac{1}{2}$ in diesem punktierten Bereich.

Zusatz: Bestimmen Sie eine Lösung zum Anfangswert $x(0) = 0$ und prüfen Sie diese auf Eindeutigkeit.

Aufgabe 6.2: *4 Punkte*

Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$ fixierte, paarweise verschiedene positive Konstanten. Zeigen Sie, dass die Funktionen $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = \ln(a_k + x)$ linear unabhängig sind.

Hinweis: Eine evtl. vorhandene lineare Abhängigkeit würde sich auch auf die Ableitungen dieser Funktionen übertragen.

Extra-Aufgabe 6.3: *4+2 Zusatzpunkte*

Betrachten Sie die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(t,x(t)) = 1 + t\,x(t)^2$ auf dem ersten Quadranten $Q = \mathbb{R}^2_+$.

(a) Prüfen Sie, dass die Differentialgleichung eine lokale Lipschitz-Bedingung erfüllt und damit Anfangswertprobleme eindeutig lösbar sind.

(b) Zeigen Sie, dass alle Lösungen monoton wachsend sind.

(c) Zeigen Sie, dass jede Lösung im ersten Quadranten in endlicher Zeit „explodiert". Betrachten Sie dazu eine beliebige Lösung der ODE mit Anfangswert $x(0) = a \in \mathbb{R}_+$. Benutzen Sie die Ungleichung $f(t,x) \geq t\,x^2$, um eine untere Schranke für diese Lösung zu bestimmen. Welche Einschränkung des Definitionsbereiches $[0, T(a))$ der maximalen Lösung lässt sich folgern?

(d) Benutzen Sie *zusätzlich* die Ungleichung $f(t,x) \geq 1 + x^2$ für $t \geq 1$ um nachzuweisen: Die maximale Lösung verläuft vollständig im Streifen $[0, \tilde{T}(a)] \times \mathbb{R}_+$, wobei

$$\tilde{T}(a) \begin{cases} 1 + \frac{\pi}{2} & \text{für } a \in [0,2), \\ 1 & \text{für } a \geq 2. \end{cases}$$

Bitte wenden.

Aufgabe 6.4: *4 Punkte*

Bestimmen Sie zur folgenden Differentialgleichung ein reelles Fundamentalsystem sowie eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung.

$$\dddot{x}(t) - \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) - x(t) = 4\cos(2t)$$

Für welche Vorgabe von Anfangswerten für $x(0)$, $\dot{x}(0)$ und $\ddot{x}(0)$ ergeben sich Lösungen, die auf dem positiven Halbstrahl $\mathbb{R}_+$ beschränkt bleiben? Gibt es Anfangswerte, zu denen die Lösung rein periodisch ist?

Aufgabe 6.5: *6 Punkte*

Bestimmen Sie Fundamentalsysteme über die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren der Systemmatrizen der folgenden von einem reellen Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängigen homogenen linearen Differentialgleichungen

$$a)\ \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} x(t) \qquad b)\ \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} a & -2 & 2 \\ 2 & a & -1 \\ -2 & 1 & a \end{pmatrix} x(t)$$

Untersuchen Sie, in Abhängigkeit vom Parameter a und Anfangswert, welche der Lösungen auf $\mathbb{R}_+$ beschränkt bleiben.