HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. PHD. A. GRIEWANK
DR. L. LEHMANN; DIPL.-MATH. CARSTEN FALK

Übungsaufgaben zur Analysis IIIa (WS 09/10)
Serie 9

Abgabe am Mo., 4. Januar 2010 vor der Vorlesung

Aufgabe 9.1: *(4+4) Punkte*

Der Lorenz-Attraktor ist das Ergebnis des asymptotischen Verhaltens des dynamischen Systems

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma\,(y-x)\\ \dot{y} &= x\,(\rho - z) - y\\ \dot{z} &= x\,y - \beta\,z\end{aligned}$$

mit positiven Konstanten (ρ,σ,β). Typische Werte für dieses Konstantentripel sind $(28,10,8/3)$.

(a) Bestimmen Sie die Fixpunkte dieses Systems und die Stabilität der Linearisierung in diesen Fixpunkten.

(b) Bestimmen Sie die Iterationsformel für die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung in einem beliebigen Punkt.

(c) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung bis zum dritten Grad für die angegebenen Konstanten und Startwerte $(x,y,z) = (1,1,1)$.

Aufgabe 9.2: *4 Punkte*

Definition: M eine Teilmenge des Banachraums X habe die *Fixpunkteigenschaft* (FPE) falls alle auf M stetigen Funktionen $f: M \to M$ einen Fixpunkt haben. Teilmengen von $\mathbb{R}$ haben die FPE, wenn sie kompakte Intervalle sind. Zeigen Sie in den nachfolgenden Situationen durch Konstruktion von fixpunktlosen stetigen Abbildungen, dass diese Voraussetzungen nicht abgeschwächt werden können.

(a) Zeigen Sie dass falls $M \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist, es dann kompakt sein muss, d.h., es darf weder unbeschränkt noch (halb-)offen sein.

(b) Zeigen Sie, dass im Falle $M \subset \mathbb{R}$ es keine Zerlegung $M = M_1 \cup M_2$ in zwei disjunkte Teilmengen M_1, M_2 geben darf.

Aufgabe 9.3: *4 Punkte*

Zeigen Sie, dass die Einheitskugel B in ℓ_2,

$$B = \{x: \; \|x\| \leq 1\}, \quad \text{wobei} \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2},$$

nicht die FPE hat. Untersuchen Sie dazu die Funktion $F: B \to B$ auf Stetigkeit und Fixpunkte, wobei

$$F(x) = \begin{cases} (1,0,0,\dots) & \text{für } x = 0,\\ \left(\sqrt{1-\|x\|},\, \frac{x_1}{\sqrt{\|x\|}},\, \frac{x_2}{\sqrt{\|x\|}},\, \dots\right) & \text{sonst.}\end{cases}$$

für alle $x = (x_k)_{k=1,2,\dots} \in B_1(0) \subset \ell_2$.

Bitte wenden.

Aufgabe 9.4: *4 Punkte*

Seien H ein reeller Hilbertraum und $C \subset H$ eine abgeschlossene konvexe Menge. Definiere $p : H \to C$ als die Projektion auf C, d.h. für jedes $x \in H$ ist $p(x)$ der Punkt in C mit minimalem Abstand,

$$\|x - p(x)\| = \inf\{\|x - y\| : \ y \in C\}.$$

Zeigen Sie, dass dann

(a) $\langle p(x) - y, p(x) - x\rangle \leq 0$ für alle $y \in C$ und daraus folgend

(b) $\|p(x) - p(\bar{x})\| \leq \|x - \bar{x}\|$, d.h. p ist Lipschitz-stetig mit Konstante $L = 1$.

Hinweis: Betrachte die Strecke $p(x) + tv$, $t \in [0, 1]$ mit $y = p(x) + v \in C$.