**HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN**
**INSTITUT FÜR MATHEMATIK**
PROF. PHD. A. GRIEWANK
DR. L. LEHMANN; DIPL.-MATH. CARSTEN FALK

# Übungsaufgaben zur Analysis IIIa (WS 09/10)
# Serie 10

Abgabe am Mo., 11. Januar 2010 vor der Vorlesung

---

**Aufgabe 10.1:** (Korr. 6.1., 14:00: $k \to k+1$)) *4 Punkte*

(a) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^k \sin(1/x)$ für $k = 2$ in jedem Punkt differenzierbar, aber nicht überall stetig differenzierbar ist, und für $k = 3$ einmal, aber nicht zweimal stetig differenzierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Ableitungen von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

die Form $f^{(k)}(x) = P_k(\frac{1}{x})\, f(x)$ mit Polynomen $P_k$ hat und daher $f$ beliebig oft stetig differenzierbar ist, dass aber die Taylorreihe von $f$ im Punkte $x = 0$ in keiner Umgebung des Ursprungs mit der Funktion übereinstimmt.

**Aufgabe 10.2:** *6 Punkte*

(i) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf komplexe Differenzierbarkeit und Holomorphie:

$$\begin{array}{ll} (a)\ f(z) = z \cdot \bar{z}, & (b)\ f(z) = z^2 \cdot \bar{z}, \\ (c)\ f(x+iy) = e^x(\cos(y) + i\sin(y)), & (d)\ f(z) = \mathrm{Re}(z)\,. \end{array}$$

(ii) Welche Bedingung müssen die Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ erfüllen, damit die Funktion $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$,

$$u(x+iy) = x^2 + 2axy + by^2$$

der Realteil einer auf $\mathbb{C}$ holomorphen Funktion ist? Bestimmen Sie für jedes zulässige Paar $(a, b)$ alle diese holomorphen Funktionen.

**Aufgabe 10.3:** *4 Punkte*

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass $f$ schon konstant ist, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist.

(a) $f(G) \subset \mathbb{R}$.

(b) Eine der Funktionen $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ oder $|f|$ ist konstant.