HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. PHD. A. GRIEWANK
DR. L. LEHMANN; DIPL.-MATH. CARSTEN FALK

Übungsaufgaben zur Analysis IIIa (WS 09/10)
Serie 11

Abgabe am Mo., 18. Januar 2010 vor der Vorlesung

Aufgabe 11.1: *4 Punkte*

Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig komplex differenzierbar. Für ein festes $z_0 \in G$ sei $f'(z_0) \neq 0$. Zeigen Sie mit Hilfe des Inverse–Funktionen–Theorems (für Funktionen in zwei reellen Variablen), dass es dann offene Umgebungen U von z_0 und V von $f(z_0)$ gibt, so dass gilt

(a) $f : U \to V$ ist bijekiv und

(b) die Umkehrabbildung $f^{-1} : V \to U$ ist ebenfalls stetig komplex differenzierbar mit Ableitung

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \text{ für alle } w \in V\,.$$

Aufgabe 11.2: *6 Punkte*

Der Binomialkoeffizient für reellen Zähler ist definiert als

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha - j) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} & \text{im allgemeinen Fall.} \end{cases}$$

Prüfen Sie die Richtigkeit der folgenden Taylorentwicklung von f_α um $x = 0$ für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha, \quad B_\alpha(x) = T_{f_\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \tbinom{\alpha}{k} x^k\,.$$

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe B_α für einen beliebigen, nun auch komplexen, Parameter $\alpha \in \mathbb{C}$.

Zeigen Sie, dass für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ innerhalb des Konvergenzkreises die Identität

$$B_\alpha(z) \cdot B_\beta(z) = B_{\alpha+\beta}(z)$$

erfüllt ist.

Aufgabe 11.3: *4 Punkte*

Bestimmen Sie

$$\int_\Gamma \left(z^2 + iz\right)\, dz$$

wobei der Weg Γ durch die explizite Darstellung $x = t$ und $y = 2t^2$ für $t \in [0,1]$ und $y = 2t$ für $t \in [1,3]$ gegeben ist.

Bitte wenden.

Aufgabe 11.4: *6 Punkte*

Seien $f(z) = z^2\,\bar{z}$ und $P = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$. Berechnen Sie die Wegintegrale $\int_\Gamma f(z)\,dz$

1. wenn Γ der geradlinige Weg von $(0,0)$ nach P ist und
2. wenn Γ der Weges ist, der geradlinig von $z = 0$ nach $z = 1$ führt und dann entlang des Einheitskreises nach P.
3. Vergleichen Sie die Werte.