HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. PHD. A. GRIEWANK
DR. L. LEHMANN; DIPL.-MATH. CARSTEN FALK

Übungsaufgaben zur Analysis IIIa (WS 09/10)
Serie 14

Diskussion ab Mo., 8. Februar 2010 vor der Vorlesung

Aufgabe 14.1: *4 Punkte*

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, also ganz, mit beschränktem Imaginärteil, $|Im(f(z))| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass dann schon f konstant sein muss.

Aufgabe 14.2: *Punkte*

Seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit einer isolierten Singularität $z_0 \in G$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) z_0 ist keine hebbare Singularität von f genau dann wenn z_0 eine wesentliche Singularität von $\sin(f(z))$ ist.

(b) Der Typ der Singularität z_0 von f und der Ableitung f' ist derselbe.

Aufgabe 14.3: *Punkte*

Bestimmen Sie den Hauptteil der Laurentreihenentwicklungen um $z_0 = 1$ für $0 < |z-1| < 1$, d.h. im Kreisring $A_0^1(1)$, von

$$(a)\ \frac{z^4}{(1-z)^2}, \quad (b)\ \frac{z^4}{1-z^2}, \quad (c)\ \frac{1}{(\ln z)^2},$$

in (c) ist der Hauptzweig des Logarithmus zu verwenden.

Aufgabe 14.4: *Punkte*

Bestimmen Sie den Wert des folgenden Integrals

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{5z^{63}}{16z^{64} - 4z^{41} + 2z^4 - 3}\, dz$$

Prüfen Sie dazu, dass alle Nullstellen innerhalb des Einheitskreises liegen müssen und bestimmen Sie die Laurentreihe per Inversion von Potenzreihen.

Bitte wenden.

Aufgabe 14.5: *Punkte*

(a) Zeigen Sie, dass das Polynom $p(z) = z^2 - 2z + 2$ auf $\Omega = \mathbb{C} \setminus T$, wobei $T = \{1 + it : |t| \leq 1\}$ die Strecke zwischen $1 + i$ und $1 - i$ ist, eine holomorphe Quadratwurzel besitzt, d.h., dass es eine holomorphe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ gibt mit $f(z)^2 = (-f(z))^2 = p(z)$. Dabei sei f so gewählt, dass $f(0) = \sqrt{2}$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\ln(p(z))$ auf Ω eindeutig definiert werden kann.

(b) Bestimmen Sie die auf $B_1(0)$ gültige Reihenentwicklung von f und geben Sie deren Konvergenzradius an.

(c) Bestimmen Sie die Laurentreihenentwicklung von f auf $A = \{z : |z| > \sqrt{2}\}$ und $B = \{z : |z - 1| > 1\}$.