Musterlösungen

3. Februar 2012

Aufgabe 1.1

Für den Fall $A_1 = \cdots = A_n = \emptyset$ ist die Gleichung trivialerweise erfüllt. Gelte also für mindestens ein $k \in \{1, \ldots, n\}: \ A_k \neq \emptyset$. Weiterhin gelten offensichtlich folgende Inklusionen: $\bigcup_{k=1}^n A_k \supset \bigcap_{j=1}^n A_j$ und

$$A_1 \cup \cdots \cup A_n \supset (A_1 \cup A_2) \setminus (A_1 \cap A_2) \cup \cdots \cup (A_{n-1} \cup A_n) \setminus (A_{n-1} \cap A_n)$$

Daraus folgt:

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \supset \bigcap_{j=1}^{n} A_k \cup \bigcup_{l=1}^{n-1} A_l \triangle A_{l+1}$$

Inklusion in umgekehrter Richtung:

Wähle $x \in \bigcup_{k=1}^n A_k$. Dann existiert ein $k_0 \in \{1, \ldots, n\}$, sodass $x \in A_{k_0}$.

Fall 1: $x \in A_k \ \forall \, k \in \{1, \ldots, n\}$. Dann gilt $x \in \bigcap_{j=1}^n A_j$.

Fall 2: Es existiert ein $j_0 \neq k_0$, sodass $x \notin A_{j_0}$. Dann gibt es mindestens eine Menge A_{k_0}, sodass x darin enthalten ist und mindestens eine A_{j_0}, sodass x darin nicht enthalten ist. Nun existiert m, $1 \leq m \leq n$ so dass gilt: $x \in A_m \ \wedge \ x \notin A_{m+1}$. Daraus erhält man, dass $x \in A_m \triangle A_{m+1}$ und es gilt weiter: $x \in \bigcup_{l=1}^{n-1} A_l \triangle A_{l+1}$. Insgesamt also:

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subset \bigcap_{j=1}^{n} A_k \cup \bigcup_{l=1}^{n-1} A_l \triangle A_{l+1}$$

Damit sind die Inklusionen in beide Richtungen gezeigt, die Mengen sind folglich gleich.

Aufgabe 1.2

Folgende Bezeichnungen sollen im Folgenden gelten:

$$\begin{aligned} N &:= \{1, \ldots, n\} & & \\ I &:= \{i_1, \ldots, i_k\} \subset N & (I) &:= (i_1 \ldots, i_k) \in N^k \\ J &:= \{j_1, \ldots, j_{n-k+1}\} \subset N & (J) &:= (j_1, \ldots, j_{n-k+1}) \in N^{n-k+1} \end{aligned}$$

Sowie stets $i_1 < i_2 < \cdots$ und $j_1 < j_2 < \cdots$.

(i) Zu zeigen: $x \in U_k \Rightarrow x \in V_{n-k+1}$
Es gilt:

$$x \in U_k \Leftrightarrow \exists\, (I) \quad \forall\, i \in I: \ x \in A_i$$

Sei also $(I)_*$ ein solches k-Tupel, sodass $x \in U_k$. Sei weiter $(J)_*$ ein beliebiges $(n-k+1)$-Tupel wie oben definiert. Dann gilt:

$$|I_*| + |J_*| = n + 1 > n = |N| \Rightarrow I_* \cap J_* \neq \emptyset$$

Da $i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_{n-k+1} \in \{1, \ldots, n\}$. Daraus folgt nun:

$$\exists\, j_* \in J_*,\ i_* \in I_*: \quad i_* = j_*$$

Dann gilt auch:

$$x \in U_k \Rightarrow x \in A_{i_*} \Leftrightarrow x \in A_{j_*}$$

Insgesamt also:

$$\begin{aligned} & \forall\, (J) \quad \exists\, j_* \in J: \ x \in A_{j_*} \\ \Leftrightarrow \quad & x \in \bigcup_{(J) \in N^{n-k+1}} \bigcap_{j \in J} A_j = V_{n-k+1} \\ \Rightarrow \quad & U_k \subset V_{n-k+1} \end{aligned}$$

(ii) Zu zeigen: $x \in U_k \Leftarrow x \in V_{n-k+1}$ Es gilt:

$$x \in V_{n-k+1} \Leftrightarrow \forall\, (J)\, \exists\, j \in J: \quad x \in A_j$$

Angenommen, es gibt höchstens $k-1$ verschiedene $j \in N$, sodass $x \in A_j$. Dann existieren $n-k+1$ verschiedene Elemente $l \in N$ mit $x \notin A_l$. Diese in einem entsprechenden Tupel angeordnet widersprächen allerdings der Forderung, dass für alle $(n-k+1)$-Tupel (J) ein $j \in J$ existiert, sodass $x \in A_j$.

Damit existiert mindestens ein k-Tupel (I), sodass $x \in A_i$ für alle $i \in I$. Dies ist aber gerade äquivalent zu $x \in U_k$.

Demnach folgt aus (i) und (ii)

$$x \in U_k \Longleftrightarrow x \in V_{n-k+1}$$

Aufgabe 1.3

(i) Zuerst stellt man fest: $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subset 2^X \Rightarrow \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \subset 2^X$
Nun überprüft man die Algebraeigenschaften:

$$A, B \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \Rightarrow \wedge \begin{cases} A, B \in \mathcal{S}_1 \\ A, B \in \mathcal{S}_2 \end{cases}$$

Daraus folgt wegen der Eigenschaften von $\mathcal{S}_1$ und $\mathcal{S}_2$:

$$\Rightarrow \wedge \begin{cases} A \cup B \in \mathcal{S}_1 & A \setminus B \in \mathcal{S}_1 & A^C, B^C \in \mathcal{S}_1 \\ A \cup B \in \mathcal{S}_2 & A \setminus B \in \mathcal{S}_2 & A^C, B^C \in \mathcal{S}_2 \end{cases}$$

Schließlich gilt also:

$$A, B \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \qquad A \setminus B \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \qquad A^C, B^C \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$$

Die letzte Eigenschaft zeigt man analog:

$$\begin{aligned} A_k \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \ (\forall\, k \in \mathbb{N}) &\Rightarrow A_k \in \mathcal{S}_1 \ \wedge \ A_k \in \mathcal{S}_2 \\ &\Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{S}_1 \ \wedge \ \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{S}_2 \\ &\Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \end{aligned}$$

(ii) Diese Aussage zeigt man in verallgemeinerter Weise ebenso wie oben: Sei $i \in I$, dann gilt wegen der Eigenschaften der $\mathcal{S}_i$:

$$\begin{aligned} A, B \in \mathcal{S} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{S}_i &\Rightarrow \forall\, i \in I : A, B \in \mathcal{S}_i \\ &\Rightarrow \forall\, i \in I : A \cup B \in \mathcal{S}_i, \quad A \setminus B \in \mathcal{S}_i, \quad A^C, B^C \in \mathcal{S}_i \\ &\Rightarrow A \cup B,\ A \setminus B,\ A^C, B^C \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{S}_i \end{aligned}$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} A_k \in \mathcal{S} \quad (\forall\, k \in \mathbb{N}) &\Rightarrow \forall\, i \in I,\ k \in \mathbb{N} : A_k \in \mathcal{S}_i \\ &\Rightarrow \forall\, i \in I : \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{S}_i \\ &\Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

Aufgabe 1.4

(i)

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n = \left\{ A \in 2^X \,\middle|\, \exists\, n_0 \geq 1 : A \in \mathcal{A}_{n_0} \right\}$$

$$A, B \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \exists\, n_0 \geq 1 : & A \in \mathcal{A}_{n_0} \\ \exists\, m_0 \geq 1 : & B \in \mathcal{A}_{m_0} \end{array} \right.$$

Da die Folge $\{\mathcal{A}_n\}_{n \geq 1}$ als wachsend vorausgesetzt war, gilt:

$$m := \max\{n_0, m_0\} \Rightarrow A, B \in \mathcal{A}_m$$

Damit übertragen sich die Algebraeigenschaften (wie in Aufgabe 1.3) aus $\mathcal{A}_m$ auf die Vereinigung.

Aufgabe 2.1

(i)

$$\sigma(M_1) = \Big\{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\} \Big\}$$

(ii) Folgende einelementigen Mengen sind in $\sigma(M_2)$ enthalten:

$$\{1\} = \{1,2\} \setminus \{2,3\}, \qquad \{2\} = \{1,2\} \setminus \{1\} \quad \text{und} \quad \{3\} = \{2,3\} \setminus \{2\}$$

Deren Komplemente sind $\{2,3,4,5\}, \{1,3,4,5\}, \{1,2,4,5\}$.

Daraus ergeben sich durch Vereinigung die zweielementigen Mengen $\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$. Sowie deren Komplemente $\{3,4,5\}, \{2,4,5\}, \{1,4,5\}$.

Eine weitere dreielementige Menge existiert, nämlich $\{1,2,3\} = \{1,2\} \cup \{3\}$. Deren Komplement ist $\{4,5\}$.

Schließlich gehören auch $\emptyset$ und $X = \{1,2,3,4,5\}$ zu $\sigma(M_2)$.

(iii) Die einzigen einelementigen Mengen sind $\{1\}$ und $\{4\} = \{4,5,6\} \setminus (X \setminus (\{1\} \cup \{2,3,4\}))$. Deren Komplemente sind $\{2,3,4,5,6\}$ und $\{1,2,3,5,6\}$. Daraus ergibt sich die Vereinigung $\{1,4\}$ und deren Komplement $\{2,3,5,6\}$.

Weitere zweielementige Mengen sind: $\{2,3\} = \{2,3,4\} \setminus \{4\}$ und $\{5,6\} = \{4,5,6\} \setminus \{4\}$. Deren Komplemente sind $\{1,4,5,6\}$ und $\{1,2,3,4\}$.

Die dreielementigen Mengen sind: $\{1,2,3\}$, $\{2,3,4\}$, $\{4,5,6\}$, $\{1,5,6\}$. In dieser Aufzählung sind auch die jeweiligen Komplemente enthalten.

Außer $\emptyset$ und $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ gehören keine weiteren Mengen zu $\sigma(M_3)$.

Aufgabe 2.2

1. Per Definition ist $\mathcal{B}^n$ gerade gleich $\sigma(\mathcal{O}^n)$. Nun gilt, dass eine Menge genau dann offen ist, wenn ihr Komplement abgeschlossen ist. Also ist $\sigma(\mathcal{O}^n) = \sigma(\mathcal{C}^n) = \mathcal{B}^n$.

   Jede offene Menge U ist abzählbare Vereinigung offener Intervalle mit rationalen Grenzen:
   $$U = \bigcup_{\substack{a,b\in\mathbb{Q}^n \\ ]a,b[\subset U}}]a,b[$$

   Gleichzeitig ist jedes solche offene Intervall abzählbare Vereinigung von halboffenen Intervallen
   $$]a,b[= \bigcup_{\substack{r\in\mathbb{Q}^n \\ a_k<r_k<b_k}}]a,r]$$

   Also gilt $\mathcal{B}^n = \sigma(\mathcal{O}^n) \subset \sigma(\mathcal{I}^n)$. In Rückrichtung gilt aber auch, dass jedes halboffene Intervall abzählbarer Durchschnitt von offenen Mengen ist:
   $$]a,b] = \bigcap_{i=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{n} \left] a_k, b_k - \frac{1}{n} \right[$$

   Somit ist auch $\sigma(\mathcal{I}^n) \subset \sigma(\mathcal{O}^n)$; insgesamt also $\sigma(\mathcal{I}^n) = \mathcal{B}^n$.

   Zuletzt sind die Intervalle $]\infty; c]$ alle als abzählbare Vereinigung von halboffenen Intervallen aus $\mathcal{I}^n$ darstellbar:
   $$]\infty; c] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n}]-k; c_i]$$

Und die halboffenen sind die Differenzen zweier einseitig unbegrenzter Intervalle:

$$]a; b] \ =]\infty; b] \setminus]\infty; a]$$

Damit folgt:

$$\sigma(\mathcal{I}^n_\infty) = \sigma(\mathcal{I}^n) = \mathcal{B}^n$$

Aufgabe 2.4

Beweis durch Intervallschachtelung: Ein solches Maß würde insbesondere die σ-Additivitätseigenschaft erfüllen. Man betrachte also die beiden Teilintervalle $I_1^1 := [0, \frac{1}{2}]$ und $I_1^2 := [\frac{1}{2}, 1]$. Dann gilt:

$$\mu(I_1^1) + \mu(I_1^2) - \underbrace{\mu(\{\tfrac{1}{2}\})}_{=0} = \mu(X) = 1$$

Da nun das Maß nur die beiden Werte 0 und 1 annehmen darf, folgt daraus, dass eines der beiden Intervalle das Maß 1 haben muss. Also o. B. d. A. $\mu(I_1^1) = 1$. Nun halbiert man wieder: $I_2^1 := [0, \frac{1}{4}]$ und $I_2^2 := [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ Dann folgt mit der selben Argumentation wie oben, dass o. B. d. A. $\mu(I_2^1) = 1$. Dieses Verfahren lässt sich nun wegen der σ-Additivität des Maßes in infinitum fortführen, bis die Intervallschachtelung eine nur einen Punkt umfassende Menge $I_\infty^1 = \{x\}$ ergibt, die das Maß 1 haben muss (Stetigkeit von oben). Dies widerspricht aber der Forderung, dass alle endliche Teilmengen das Maß 0 haben müssen. Somit existiert kein solches Maß.

Aufgabe 3.2

Sei $f : R \to R$ monoton, $f_+ := f\Big|_{\mathbb{R}_0^+}$. Dann existieren nur höchstens abzählbar unendlich viele verschiedene Unstetigkeitsstellen a_i von f_+ (s. u.). Diese ergeben angeordnet eine monotone Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Die Teilfunktionen $f_i := f\Big|_{]a_i;a_{i+1}[}$ sind stetig und damit messbar. $\hat{f}_i := f\Big|_{\{a_i\}}$ ist trivialerweise messbar. Also setzt sich der Definitionsbereich von f_+ wie folgt zusammen:

$$\mathbb{R}_0^+ = \{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty}]a_i; a_{i+1}[$$

Insgesamt ist also:

$$f_+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \hat{f}_i \ \cup \ \bigcup_{i=1}^{\infty} f_i$$

Also lässt sich f_+ als abzählbare disjunkte Vereinigung von stetigen Teilfunktionen auffassen und ist folglich messbar. Ein analoges Ergebnis erhält man für $f_- := f\Big|_{\mathbb{R}^-}$. Schließlich ergibt sich f als die Vereinigung von f_+ und f_-. Damit ist Messbarkeit gezeigt.

Zu zeigen bleibt, dass eine monotone, o. B. d. A. wachsende Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen hat. Sei $c \in]a, b[$ eine Unstetigkeitsstelle. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass für alle $\delta > 0$ ein $x \in \mathbb{R}$ existiert mit $|x - c| \leq \delta \ \wedge \ |g(x) - g(c)| \geq \varepsilon$. ε ist sozusagen die kleinste Sprunghöhe in $g([c - \delta, c + \delta])$. Wegen Monotonie folgt:

$$g([c - \delta, c + \delta]) \subset [g(c - \delta), g(c + \delta)] \subset [g(c) - \delta', g(c) + \delta']$$

Die maximale Anzahl der Sprungstellen ist also:

$$\frac{g(c - \delta) - g(c + \delta)}{\varepsilon} \xrightarrow{\delta' := \frac{1}{n} \to 0} 0$$

Gleichzeitig ist $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [c - n, c + n]$ Also ist die Menge der Sprungstellen auf $\mathbb{R}$ höchstens abzählbar.

Aufgabe 4.1

Beweis durch Fallunterscheidung:

	$x \in A \cap B$	$x \in A \setminus B$	$x \in B \setminus A$	$x \notin A \cup B$
$\chi_A(x)$	1	1	0	0
$\chi_B(x)$	1	0	1	0
$\chi_{A \cap B}(x)$	1	0	0	0
$\chi_A(x)\chi_B(x)$	1	0	0	0
$\chi_{A \cup B}(x)$	1	1	1	0
$(\chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B)(x)$	1	1	1	0
$\chi_{A \setminus B}(x)$	0	1	0	0
$(\chi_A - \chi_A\chi_B)(x)$	0	1	0	0
$\chi_{A \triangle B}(x)$	0	1	1	0
$\|\chi_A(x) - \chi_B(x)\|$	0	1	1	0

Aufgabe 4.2

Sei $x_0 \in U_k$. Dann gilt:

$$d(x_0, U^C) > \frac{1}{k} \Rightarrow \delta := \frac{d(x_0, U^C) - \frac{1}{k}}{2} > 0$$

Und für alle $x \in \mathbb{B}_\delta(x_0) := \{y \in Y : d(x_0, y) < \delta\}$ gilt nach der Dreiecksungleichung: $d(x_0, x) + d(x, U^C) \geq d(x_0, U^C)$

$$\Rightarrow d(x, U^C) \geq d(x_0, U^C) - d(x_0, x) > d(x_0, U^C) - \delta > \frac{d(x_0, U^C)}{2} + \frac{1}{2k} > \frac{1}{k}$$

Also $\mathbb{B}_\delta(x_0) \subset U_k$. Daraus folgt, dass U_k offen ist.

Aufgabe 4.4

Die kanonische Projektion $\pi_i : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $(x_k)_{k=1}^n \mapsto x_i$ ist stetig. Denn für jedes $\varepsilon > 0$ gilt zum Beispiel:

$$\|x - y\|_1 = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| < \varepsilon/2 =: \delta \Rightarrow |x_i - y_i| = |\pi_i(x) - \pi_i(y)| < \varepsilon/2 < \varepsilon$$

Weiterhin gilt $f_i = \pi_i \circ f$. Betrachte also eine offene Menge $O \subset \mathbb{R}$. Dann ist $O' := \pi_i^{-1}(O)$ wegen der Stetigkeit offen in $\mathbb{R}^n$, also auch Element von $\mathcal{B}^n$. Wegen der Messbarkeit von f folgt, dass auch $f^{-1}(O') \in \mathcal{B}$ gilt. Also hat man

$$\mathcal{B} \ni f^{-1}(O') = f^{-1}(\pi_i^{-1}(O)) = f_i^{-1}(O) \quad \forall\, O \subset \mathbb{R} \text{ offen}$$

Da die offenen Mengen $O \subset \mathbb{R}$ die Borelsche σ-Algebra erzeugen, folgt Messbarkeit von f_i.

Aufgabe 4.5

Angenommen es gelte $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist f auf $\mathbb{R}$ konstant und die Bildmenge ist einelementig, also eine Lebesgue-Nullmenge.

Gibt es ein $x_1 \in \mathbb{R}$ mit $f'(x_1) \neq 0$, dann existiert wegen der Stetigkeit von f' ein $\delta_1 \in \mathbb{Q}^+$, sodass $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in]x_1 - \delta_1; x_1 + \delta_1[=: I_1$. Dann ist $A \subset \mathbb{R} \setminus I_1 =: A_1$. Ist nun $f'(x) = 0$ für alle $x \in A_1$, dann ist f konstant auf den beiden Teilintervallen $]-\infty, x_1 - \delta_1]$ und $[x_1 + \delta_1; \infty[$ und die Bildmenge ist höchstens zweielementig. Gibt es ein $x_2 \in A_1$ mit $f'(x_2) \neq 0$, dann gibt es $\delta_2 \in \mathbb{Q}^+$, sodass $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in]x_2 - \delta_2; x_2 + \delta_2[=: I_2$. Daraus ergibt sich $A \subset A_1 \setminus I_2$. Aus der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ folgt, dass höchstens abzählbar viele solcher Intervalle I_k existieren können (gibt es nur endlich viele, etwa n, so setze $I_k = \emptyset$ für $k > n$). Induktiv erhält man:

$$A = (\cdots((\mathbb{R} \setminus I_1) \setminus I_2) \setminus \cdots) = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus I_k)$$

Dieser Durchschnitt setzt sich hierbei aus endlichen Mengen und Intervallen zusammen, auf denen f konstant ist. Also ist

$$f(A) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{c_j\} \quad c_j \in \mathbb{R}$$

Also ist $\lambda(f(A)) = 0$ als abzählbare Punktmenge.

Aufgabe 5.3

Für eine einfache Funktion f gilt: $f(x) = a \iff x \in f^{-1}(a)$. Also kann man f auch in der folgenden Form schreiben:

$$f(x) = \sum_{a \in f(X)} a \chi_{f^{-1}(a)}(x)$$

Da einfache Funktionen nur endlich viele verschiedene Werte in $\mathbb{R}$ annehmen, ist $f(X)$ endlich und man erhält eine endliche Summe und damit eine Normalform von f. Wegen der Messbarkeit von f ist auch $f^{-1}(a) = \{f = a\}$ messbar und nach Definition des Integrals einfacher Funktionen folgt:

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{a \in f(X)} a \mu(\{f = a\})$$

Ebenso gilt für $\chi_{\{f=a\}}$:

$$\int_X \chi_{\{f=a\}} \,\mathrm{d}\mu = \mu(\{f = a\})$$

Insgesamt ergibt sich:

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{a \in f(X)} a \int_X \chi_{\{f=a\}} \,\mathrm{d}\mu$$

Wegen der Positivität von f gilt $a \geq 0$ für alle $a \in f(X)$ und somit:

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{a \in f(X)} \int_X a\chi_{\{f=a\}} \,\mathrm{d}\mu$$

Aufgabe 5.4

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\int_X |f| \,\mathrm{d}\mu &= \frac{1}{c}\left(\int_{\{|f|<c\}} |f| \,\mathrm{d}\mu + \int_{\{|f|\geq c\}} |f| \,\mathrm{d}\mu\right)\\ &= \int_{\{|f|<c\}} \underbrace{\frac{|f|}{c}}_{\in [0,1[} \,\mathrm{d}\mu + \int_{\{|f|\geq c\}} \underbrace{\frac{|f|}{c}}_{\geq 1} \,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

Es gilt also wegen Monotonie des Integrals:

$$\geq \int_{\{|f|<c\}} 0 \,\mathrm{d}\mu + \int_{\{|f|\geq c\}} 1 \,\mathrm{d}\mu$$

Weiter ist die konstante 1-Funktion auf dem Integrationsbereich mit der charakteristischen Funktion $\chi_{\{|f|\geq c\}}$ zu identifizieren und es folgt nach Definition des Integrals einfacher Funktionen:

$$= \int_{\{|f|\geq c\}} \chi_{\{|f|\geq c\}} \,\mathrm{d}\mu = \mu(\{|f| \geq c\})$$

Den zweiten Teil sieht man genauso:

$$\begin{aligned}\frac{1}{h(c)}\int_X h \circ |f| \,\mathrm{d}\mu &= \frac{1}{h(c)}\left(\int_{\{|f|<c\}} h(|f|) \,\mathrm{d}\mu + \int_{\{|f|\geq c\}} h(|f|) \,\mathrm{d}\mu\right)\\ &= \int_{\{|f|<c\}} \underbrace{\frac{h(|f|)}{h(c)}}_{\in [0,1[} \,\mathrm{d}\mu + \int_{\{|f|\geq c\}} \underbrace{\frac{h(|f|)}{h(c)}}_{\geq 1} \,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

Hier folgen die Abschätzungen der Quotienten aus der Monotonie von h.

$$\geq \int_{\{|f|<c\}} 0 \,\mathrm{d}\mu + \int_{\{|f|\geq c\}} 1 \,\mathrm{d}\mu = \mu(\{|f| \geq c\})$$

Aufgabe 6.3

(i) Man verwende die Koordinatentransformation $x_1' := x_1 + x_3$. Diese entspricht der durch die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

repräsentierten linearen Abbildung. Diese hat Determinante 1, also gilt:

$$\lambda_3(A_1) = \lambda_3\{(x_1', x_2, x_3):\ 0 \le x_3,\ 1 \le x_2^2 + x_3^2 \le 2,\ 0 \le x_1' \le 5\}$$

Nach dem Prinzip von Cavalieri gilt:

$$= \int_0^5 \lambda_2\{(x_2, x_3):\ 0 \le x_3;\ 1 \le x_2^2 + x_3^2 \le 2\}\,\mathrm{d}x_1'$$

Die Flächen berechnen sich als Differenzen zweier Halbkreise wie folgt:

$$\lambda_2\{s.o.\ \} = \frac{1}{2}(2\pi - \pi) = \frac{\pi}{2}$$

Also gilt:

$$\lambda_3(A_1) = \int_0^5 \frac{\pi}{2}\,\mathrm{d}x_1 = \frac{5}{2}\pi$$

(ii) Betrachte die lineare Abbildung:

$$x_3 \begin{pmatrix} \cos(\frac{x_3\pi}{4}) & -\sin(\frac{x_3\pi}{4}) \\ \sin(\frac{x_3\pi}{4}) & \cos(\frac{x_3\pi}{4}) \end{pmatrix} =: T(x_3)$$

Dann gilt

$$\det T(x_3) = x_3^2(\cos(\frac{x_3\pi}{4})^2 + \sin(\frac{x_3\pi}{4})^2) = x_3^2$$

Nach den Eigenschaften des Lebesgue-Maßes unter linearen Transformationen folgt:

$$\lambda_2(T(x_3)(W)) = |\det(T(x_3))|\lambda_2(W) = x_3^2\lambda_2(W)$$

W ist ein Quadrat mit Seitenlängen $\sqrt{2}$, also ist $\lambda_2(W) = 2$. Dann folgt aus dem Prinzip von Cavalieri:

$$\lambda_3(A_2) = \int_0^1 \lambda_2(T(x_3)(W))\,\mathrm{d}x_3 = \int_0^1 2x_3^2\,\mathrm{d}x_3 = \frac{2}{3}$$

Aufgabe 7.1

Beweis mit vollständiger Induktion. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei nun $\bigotimes_{i=1}^m \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ für $m \le n$ gezeigt. Dann ist:

$$\bigotimes_{i=1}^{n+1} \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\{B_n \times B,\ B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

Wegen der Distributivgesetze der Mengenoperationen mit dem cartesischen Produkt genügt es, in der Menge auf der rechten Seite die Produkte der Elemente von Erzeugendensystemen für die Borelschen σ-Algebren zu betrachten. Da die Borelschen σ-Algebren von Systemen halboffener Intervalle erzeugt werden, gilt:

$$\bigotimes_{i=1}^{n+1} \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\{]a,b]_n \times]\alpha,\beta];\ a,b \in \mathbb{R}^n,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$$

Das cartesische Produkt der Intervalle liefert nun definitionsgemäß wieder ein halbioffenes Intervall und es folgt:

$$\bigotimes_{i=1}^{n+1} \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\{]a',b']_{n+1};\ a' := (a,\alpha), b' := (b,\beta) \in \mathbb{R}^{n+1}\} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1})$$

Da die Borelsche σ-Algebra gerade die kleinste vom System der halboffenen Intervalle erzeugte σ-Algebra ist. Damit ist der Induktionsschluss gezeigt.

Aufgabe 7.2

Sei $A_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^q)$ und $A_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ offene Mengen $A_1 \subset O_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^q)$ und $A_2 \subset O_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$, sodass $\lambda_q(O_1 \setminus A_1) \leq \sqrt{\varepsilon}$ und $\lambda_p(O_2 \setminus A_2) \leq \sqrt{\varepsilon}$. Dann ist $O_1 \times O_2$ offen und $A_1 \times A_2 \subset O_1 \times O_2$. Wegen $(O_1 \setminus A_1) \times (O_2 \setminus A_2) \subset (O_1 \times O_2) \setminus (A_1 \times A_2)$ gilt für das Maß der Differenzen:

$$\lambda_{q+p}((O_1 \times O_2) \setminus (A_1 \times A_2)) \leq \lambda_q(O_1 \setminus A_1) \cdot \lambda_p(O_2 \setminus A_2) \leq \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon} = \varepsilon$$

Daraus folgt: $A_1 \times A_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{q+p})$. Das heißt

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^q) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R}^p) = \sigma\{A_1 \times A_2;\ A_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^q), A_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)\} \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^{q+p})$$

Zur Striktheit der Inklusion betrachte man eine nicht Lebesgue-messbare und beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^q$. (Existenz gesichert, z. B. durch Vitali-Mengen.) Dann ist $M' := M \times \{0\}$ eine Teilmenge einer Koordinatenhyperfläche in $\mathbb{R}^{q+1}$ und somit eine Lebesgue-Nullmenge.

Beweis: Betrachte für $\varepsilon > 0$ und $k \in \mathbb{N}^q$ Quader

$$Q :=]-k,k]_q \times]-\varepsilon,\varepsilon] \quad \text{sodass } M \subset]-k,k]_q$$

Dann ist $M' \subset Q$ und es folgt $\lambda_{q+1}(M') \leq \lambda_{q+1}(Q) = (2k)^q \cdot 2\varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein werden kann, gilt: $\lambda_{q+1}(M') = 0$.

Dann ist $M' \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{q+1}) \setminus (\mathcal{L}(\mathbb{R}^q) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R}))$.

Aufgabe 7.4

(i) Setze $f_y(x) := \frac{x-y}{(x+y)^3}$ für $y \geq 0$ fest. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f_y(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{h \searrow 0} \int_h^1 (x-y)\frac{1}{(x+y)^3}\,\mathrm{d}x \overset{\text{part.}}{=} \lim_{h \searrow 0} \left((x-y)\frac{-1}{2(x+y)^2}\Big|_h^1 - \int_h^1 \frac{-1}{2(x+y)^2}\,\mathrm{d}x \right) \\
&= \lim_{h \searrow 0} \left(\frac{y-1}{2(y+1)^2} - \frac{y-h}{2(y+h)^2} - \frac{1}{2(x+y)}\Big|_h^1 \right) \\
&= \frac{y-1}{2(y+1)^2} - \frac{1}{2y} - \frac{1}{2(y+1)} + \frac{1}{2y} \\
&= -\frac{1}{(y+1)^2} =: F_x(y)
\end{aligned}$$

Dann folgt:

$$\int_0^1 F_x(y)\mathrm{d}y = \lim_{h\searrow 0}\int_h^1 -\frac{1}{(y+1)^2}\,\mathrm{d}y = \lim_{h\searrow 0}\frac{1}{y+1}\Big|_h^1 = \frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Setze nun analog $g_x(y) := \frac{x-y}{(x+y)^3} = -f_x(y)$ für $x \geq 0$ fest. Aus Symmetriegründen unterscheiden sich die Funktionen $g_x(y)$ und $f_y(x)$ nur durch ihr Vorzeichen. Also folgt:

$$\int_0^1 g_x(y)\,\mathrm{d}y = -\int_0^1 f_x(y)\,\mathrm{d}y = -F_y(x) = \frac{1}{(x+1)^2} =: G_y(x)$$

Und Integrieren liefert:

$$\int_0^1 G_y(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 F_y(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} = \int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Aus den Symmetrieeigenschaften der Funktion f folgt, dass

$$\int_{\{x\geq y\}} f\,\mathrm{d}\lambda = -\int_{\{x<y\}} f\,\mathrm{d}\lambda \Longrightarrow \int_{]0,1[^2} f\,\mathrm{d}\lambda = 0$$

Aufgabe 8.1

(i)

$$\begin{aligned}\int_0^2\int_0^{2-x_2} x_1^2+x_2^2\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 &= \int_0^2\left[\frac{1}{3}x_1^3+x_2^2x_1\right]_0^{2-x_2}\mathrm{d}x_2\\ &= \int_0^2 \frac{1}{3}(2-x_2)^3+2x_2^2-x_2^3\,\mathrm{d}x_2\\ &= \int_0^2 \frac{8}{3}-4x_2+4x_2^2-\frac{4}{3}x_2^3\,\mathrm{d}x_2\\ &= \frac{8}{3}x_2-2x_2^2+\frac{4}{3}x_2^3-\frac{1}{3}x_2^4\Big|_0^2=\frac{8}{3}\end{aligned}$$

Da $x_1^2+x_2^2 \geq 0$ gilt, folgt nach dem Satz von Fubini-Tonelli, dass das eben berechnete iterierte Integral mit dem ursprünglichen übereinstimmt. Also ist:

$$\int_A x_1^2+x_2^2\,\mathrm{d}\lambda = \frac{8}{3}$$

(ii) Man betrachte die Koordinatentransformation Φ mit $\Phi(z) := x_1 - x_2$ und $\Phi(y) := x_2$. Nun betrachte man die Grenzen:

$$\begin{aligned}x_2+1\leq x_1\leq x_2+2 &\Rightarrow 1\leq x_1-x_2\leq 2\Rightarrow 1\leq z\leq 2\\ x_1\geq 0\ \wedge\ x_2\leq 0 &\Rightarrow x_1-x_2\geq -x_2\ \wedge\ x_2\leq 0\Rightarrow -z\leq y\leq 0\end{aligned}$$

Dann ist $A = \Phi(A')$ mit $A' = \{y \in [-z, 0],\ z \in [1, 2]\}$. Außerdem gilt $\det \nabla\Phi = 1$ und damit lässt sich der Transformationssatz anwenden:

$$\int_A e^{\frac{x_1+x_2}{x_1-x_2}}\,\mathrm{d}\lambda = \int_{A'} e^{\frac{z+2y}{z}}\,\mathrm{d}\lambda = e\int_{A'} e^{\frac{2y}{z}}\,\mathrm{d}\lambda$$

Nun betrachte man das iteriert berechnete Integral:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \int_{-z}^0 e^{\frac{2y}{z}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_1^2 \left[\frac{z}{2}e^{\frac{2y}{z}}\right]_{-z}^0 \mathrm{d}z = \int_1^2 \frac{z}{2}\left(1-e^{-2}\right)\mathrm{d}z \\ &= \left(1-e^{-2}\right)\left[\frac{z^2}{4}\right]_1^2 = \frac{3}{4}\left(1-e^{-2}\right)\end{aligned}$$

Wegen $e^{\frac{2y}{z}} > 0$ gilt auch hier der Satz von Fubini-Tonelli und es gilt:

$$\int_A e^{\frac{x_1+x_2}{x_1-x_2}}\,\mathrm{d}\lambda = e\int_{A'} e^{\frac{2y}{z}}\,\mathrm{d}\lambda = e\frac{3}{4}\left(1-e^{-2}\right) = \frac{3}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right)$$

(iii) Betrachte die slices für festes $x_1 > 0$:

$$\int_0^{\sqrt{\pi - x_1^2}} \sin(x_1)\,\mathrm{d}x_2 = \sqrt{\pi - x_1^2}\,\sin(x_1) =: f(x_1)$$

und festes $x_1 < 0$:

$$\int_{-\sqrt{\pi - x_1^2}}^0 \sin(x_1)\,\mathrm{d}x_2 = \sqrt{\pi - x_1^2}\,\sin(x_1) =: f(x_1)$$

Wegen der Symmetrieeigenschaften von $\sin(x)$ und $\sqrt{\pi - x_1^2}$ gilt: $f(-x) = -f(x)$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} f(x_1)\,\mathrm{d}x_1 &= \int_{-\sqrt{\pi}}^0 f(x_1)\,\mathrm{d}x_1 + \int_0^{\sqrt{\pi}} f(x_1)\,\mathrm{d}x_1 \\ &= -\int_0^{-\sqrt{\pi}} f(x_1)\,\mathrm{d}x_1 + \int_0^{\sqrt{\pi}} f(x_1)\,\mathrm{d}x_1\end{aligned}$$

Substitution $x_1 \mapsto -x_1$ im ersten Integral ergibt:

$$= -\int_0^{\sqrt{\pi}} \underbrace{-f(-x_1)}_{=f(x_1)}\,\mathrm{d}x_1 + \int_0^{\sqrt{\pi}} f(x_1)\,\mathrm{d}x_1 = 0$$

Nach dem Satz von Fubini-Tonelli gilt damit:

$$\int_A \sin(x_1)\,\mathrm{d}\lambda = 0$$

Aufgabe 8.2

Es gilt:

$$\frac{1-\cos t}{t^2 e^t} \geq 0$$

Daher ist $f^+ = f$ und falls das uneigentliche Riemann-Integral existiert, ist f auch Lebesgue-integrierbar. Für festes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $a_0 \geq 0$, sodass für $b > a \geq a_0$ gilt:

$$\begin{aligned}\left|\int_0^b \frac{1-\cos t}{t^2 e^t}\,\mathrm{d}t - \int_0^a \frac{1-\cos t}{t^2 e^t}\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_a^b \frac{1-\cos t}{t^2 e^t}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \int_a^b \left|\frac{1-\cos t}{t^2 e^t}\right|\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b \frac{2}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right) \leq \frac{2}{a} \leq \frac{2}{a_0} \leq \varepsilon\end{aligned}$$

Also existiert nach dem Cauchy-Kriterium zur Folgenkonvergenz der Grenzwert

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1-\cos t}{t^2 e^t}\,\mathrm{d}t$$

und somit das uneigentliche Riemann-Integral.

Es gilt:

$$\frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!}}{t^2} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{t^{2k-2}}{(2k)!}$$

Damit erhält man:

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos t}{t^2 e^t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-t}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{t^{2k-2}}{(2k)!}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-t}\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{t^{2i}}{(2i+2)!}\,\mathrm{d}t$$

Integration und Reihenbildung lassen sich vertauschen:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i+2)!}\int_0^\infty t^{2i}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i+2)!}\underbrace{\Gamma(2i+1)}_{=(2i)!} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i+2)(2i+1)}$$

Mit Partialbruchzerlegung erhält man:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^i}{(2i+1)}-\frac{(-1)^i}{(2i+2)}\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i+1)} - \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i+2)} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i+1)} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}$$

Rechts stehen die Reihenentwicklung von $\log(1+x)$ und die Leibnizreihe, also folgt:

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos t}{t^2 e^t}\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i+1)} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$$

Aufgabe 8.3

Man betrachte Zylinderkoordinaten $(r,\vartheta,h) \in \mathbb{R}^3_{\geq 0}$. Dann ist

$$A \sim \{(r,\vartheta,h) \mid 0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq h \leq 4;\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}$$

Für die Wärmeverteilung gilt dann

$$T(r,\vartheta,h) = 1000 - 20r - 20h$$

Da die Funktion auf A positiv ist, gilt der Satz von Fubini-Tonelli und für das iterierte Integral erhält man:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^4\int_0^2 (1000-20r-20h)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}\vartheta &= \int_0^{2\pi}\int_0^4 \left[(1000-20h)r - 10r^2\right]_0^2 \mathrm{d}h\,\mathrm{d}\vartheta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^4 (1960-40h)\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}\vartheta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[1960h - 20h^2\right]_0^4 \mathrm{d}\vartheta \\
&= 2\pi\cdot 7520
\end{aligned}$$

$\lambda(A)$ berechnet man elementar als Volumen eines Zylinders mit Radius 2 und Höhe 4: $\lambda(A) = \pi\cdot 2^2\cdot 4 = 16\pi$. Dann ist

$$\overline{T} = \frac{2\pi\cdot 7520}{16\pi} = 940$$

Die Durchschnittstemperatur im Hochofen beträgt also 940°.

Aufgabe 8.4

Es sei

$$\int_X |f|^2\,\mathrm{d}\mu =: a^2 \qquad \int_X |g|^2\,\mathrm{d}\mu =: b^2$$

Wenn $|f|^2$ und $|g|^2$ integrierbar sind, so sind a^2 und b^2 endlich und wegen der Monotonie des Integrals beide größer oder gleich 0. Also existieren die beiden Zahlen $a = \sqrt{a^2}$ und $b = \sqrt{b^2}$. Betrachte den Fall $a, b > 0$ und die Funktionen $\tilde{f} := \frac{1}{a}f$ und $\tilde{g} := \frac{1}{b}g$. Dann gilt nach der Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel für jedes $x \in X$:

$$\left|\tilde{f}(x)\tilde{g}(x)\right| \le \frac{1}{2}\left(|\tilde{f}(x)|^2 + |\tilde{g}(x)|^2\right)$$

Aus der Messbarkeit von $|f|^2$ und $|g|^2$ folgt Messbarkeit des Produkts $|fg|^2$. Aus der Komposition mit der stetigen Wurzelfunktion ergibt sich Messbarkeit von $|fg|$ und damit auch von $|\tilde{f}\tilde{g}|$. Integrieren obiger Ungleichung liefert:

$$\int_X |\tilde{f}\tilde{g}|\,\mathrm{d}\mu \le \frac{1}{2}\int_X |\tilde{f}|^2\,\mathrm{d}\mu + \frac{1}{2}\int_X |\tilde{g}|^2\,\mathrm{d}\mu = 1$$

Denn für die beiden Integrale auf der rechten Seite gilt nach Wahl von $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$:

$$\int_X |\tilde{f}|^2\,\mathrm{d}\mu = \int_X \left|\frac{1}{a}f\right|^2 \mathrm{d}\mu = \frac{1}{a^2}\int_X |f|^2\,\mathrm{d}\mu = 1$$

Also ist:

$$\left(\int_X |\tilde{f}\tilde{g}|\,\mathrm{d}\mu\right)^2 \le 1 \Longleftrightarrow \left(\int_X \left|\frac{1}{ab}fg\right|\,\mathrm{d}\mu\right)^2 \le 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{a^2b^2}\left(\int_X |fg|\,\mathrm{d}\mu\right)^2 \le 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(\int_X |fg|\,\mathrm{d}\mu\right)^2 \le a^2b^2 \Longleftrightarrow \left(\int_X |fg|\,\mathrm{d}\mu\right)^2 \le \int_x |f|^2\,\mathrm{d}\mu \int_X |g|^2\,\mathrm{d}\mu$$

Für den Fall $a = 0 \vee b = 0$ ist die Ungleichung trivial, denn dann gilt $|f(x)| = 0 \vee |g(x)| = 0$ für μ-fast-alle $x \in X$. Und damit auch sicher $|f(x)g(x)| = 0$ μ-fast-überall.

Aufgabe 8.5

Annahme: f ist Grenzwert einer Folge von Treppenfunktionen ϕ_n bezüglich $\|\cdot\|_\infty$. Dann gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq n_0 :\ \|f - \phi_n\|_\infty \leq \varepsilon \tag{1}$$

Insbesondere gilt dann für alle $x \in [a, b]$ mit der inversen Dreiecksungleichung:

$$\varepsilon \geq |f(x)-\phi_n(x)| \geq ||f(x)|-|\phi_n(x)|| \Rightarrow |f(x)|-|\phi_n(x)| \geq -\varepsilon \Rightarrow |f(x)|+\varepsilon \geq |\phi_n(x)|$$

Damit ist für alle x $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\phi_n(x)| < \infty$. Dann folgt insbesondere auch $\|\phi_n\|_\infty =: c < \infty$. Weiterhin erhält man aus (1):

$$\Big||f(x)| - |\phi_n(x)|\Big| \leq |f(x) - \phi_n(x)| \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow |f(x)| \leq |\phi_n(x)| + \varepsilon$$

f ist als Grenzfunktion einer Folge einfacher Funktionen messbar. Daher lässt sich das Integral bilden und es gilt:

$$\int_{[a,b]} |f| \,\mathrm{d}\lambda \leq \int_{[a,b]} (|\phi_n| + \varepsilon) \,\mathrm{d}\lambda \leq (b - a)(\|\phi_n\|_\infty + \varepsilon) < \infty$$

Insgesamt ergibt sich die Abschätzung

$$\left|\int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda\right| \leq \int_{[a,b]} |f| \,\mathrm{d}\lambda \leq (b - a)(c + \varepsilon) < \infty$$

Also ist f Lebesgue-integrierbar.

Aufgabe 9.1

(i) Betrachte für festes $t_0 \in (a, b)$ die Funktion $f :\ (a, b) \times (0, 1) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t, x) := \begin{cases} 1 & t \leq t_0 \\ 0 & t > t_0 \end{cases}$$

Diese Funktion erfüllt als stückweise konstante Funktion über einer beschränkten Menge sicher die beiden Bedingungen (ii) und (iii). Nun betrachte man das Integral:

$$F(t) = \int_{(0,1)} f(t, x) \,\mathrm{d}\lambda(x) = \begin{cases} \int_{(0,1)} 1 \,\mathrm{d}\lambda(x) = \lambda(0, 1) = 1 & t \leq t_0 \\ 0 & t > t_0 \end{cases}$$

Dann ist F in t_0 nicht stetig.

(ii) Betrachte festes $t_0 \in (0, 1)$:

$$f :\ (0, 1) \times (0, 1) \to \mathbb{R};\ f(t, x) := \chi_M(x) \quad \text{für nicht messbares } M \subset (0, 1)$$

(Existenz von M gesichert durch z. B. Vitali-Mengen.) Dann ist $f(\cdot, x)$ für festes $x \in (0,1)$ konstant und damit stetig. $h(x) := 1$ für $x \in (0,1)$ ist Lebesgue-integrierbare Majorante mit $h(x) \geq \sup_{0<t<1} |f(t,x)|$ und $\int h(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = 1$.

Dann ist

$$F(t) = \int_{(0,1)} \chi_M(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \lambda((0,1) \cap M) = \lambda(M)$$

für kein $t \in (0,1)$ definiert, F existiert also nicht.

(iii) Betrachte

$$f:\ (0,1) \times (0,1) \to \mathbb{R} \quad f(t,x) := \frac{1}{(1-t)(1-x)}$$

Diese Funktion ist stetig und messbar (bezüglich der entsprechenden Variablen), erfüllt also die Bedingungen (i) und (ii). Jedoch gilt für alle $x \in (0,1)$: $\sup_{0<t<1}(f(t,x)) = \infty$, es existiert also keine Lebesgue-integrierbare Majorante. Dann gilt für das Integral:

$$F(t) = \int_{(0.1)} f(t,x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \frac{1}{1-t} \int_{(0,1)} \frac{\mathrm{d}\lambda(x)}{1-x} = \infty$$

Das heißt, F ist an keiner Stelle $t \in (0,1)$ wohldefiniert und folglich nicht stetig.

Aufgabe 9.2

Voraussetzungen für $F(t) := \int_X f(t,x)\,\mathrm{d}\lambda(x)$ lokal Lipschitz-stetig in t_0 (mit $f:\ (a,b) \times X \to \mathbb{R}$):

1. $f(t,\cdot)$ ist messbar für alle $t \in (a,b)$.
2. $f(\cdot, x)$ ist lokal-Lipschitz in t_0 für alle $x \in X$, d. h. für festes $x \in X$ und $s,t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ (mit $\varepsilon > 0$) gilt:

$$|f(t,x) - f(s,x)| \leq L(x)|s-t| \qquad L(x) \in [0,\infty)$$

3. $L:\ X \to [0,\infty)$ ist Lebesgue-integrierbar, d. h.

$$\int_X L(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \mathbf{L} \in [0,\infty)$$

Beweis: Für $t \neq s \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ gilt:

$$\begin{aligned}|F(t) - F(s)| &= \left| \int_X f(t,x)\mathrm{d}\lambda(x) - \int_X f(s,x)\,\mathrm{d}\lambda(x) \right| \leq \int_X |f(t,x) - f(s,x)|\,\mathrm{d}\lambda(x) \\ &\leq \int_X L(x)|t-s|\,\mathrm{d}\lambda(x) = |t-s| \int_X L(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \mathbf{L}|t-s|\end{aligned}$$

Also ist F in t_0 lokal Lipschitz-stetig mit Konstante $\mathbf{L}$.