Analysis III
Maß- und Integrationstheorie
Prof. PhD. A. Griewank

Wintersemester 2011/2012

(Ursprungliche Vorlesungsmitschrift von Paul Boeck, SS 2010)

Korrekturen durch Dr. Lutz Lehmann und Hernan Leovey

Letzte Änderung: 2. Februar 2012

Inhaltsverzeichnis

XI Maß- und Integrationstheorie

§46 σ–Algebren und Maße

Wünschenswerte Eigenschaften eines Volumenmaßes μ auf $X := \mathbb{R}^n$:

(i) Monotonie:
$A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$.

(ii) Quaderwert:
$A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots [a_n, b_n] := \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i\}$
$\implies \mu(A) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$ (geometrisches Volumen).

(iii) Translationsinvarianz:
$A \subset X, r \in \mathbb{R}^n \implies \mu(A + r) = \mu(A)$.

(iv) σ–Additivität:
$A_i \subset X$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j, i, j \in \mathbb{N} \implies \mu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$.

Notation: $[-\infty, \infty] := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$.

Lemma 46.1
Es ist nicht möglich, eine Abbildung $\mu : \mathcal{P}(X) \to [-\infty, \infty]$ zu definieren, die die oben gennanten Eigenshaften erfüllt. ($\mathcal{P}(X)$ bezeichnet die Menge aller Teilmengen $A \subset X = \mathbb{R}^n$, also die Pontezmenge von X).

Beweis:

Zum beweis wird das Auswahlaxiom vorausgesetzt.
Sei dann $X = \mathbb{R}^n$, und definiere eine Aquivalenzrelation durch $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}^n$, d.h. der Differenzvektor $x - y \in \mathbb{Q}^n$. Sei $A \subset [0,1]^n$ eine Menge von Repräsentanten dieser Äquivalenzklassen (dass so eine Menge existieren darf, liegt an dem Auswahlaxiom).
Bemerkung: Es gilt $|A| > |\mathbb{Q}^n|$.
Betrachte

$$B := \bigcup_{r \in [-1,1]^n \cap \mathbb{Q}^n} (A + r) \subset [-1, 2]^n.$$

Dann, es gilt $[0,1]^n \subset B$. Angenommen existiert eine Abbildung μ, die die oben gennanten Eigenschaften erfüllt, dann folgt

$$1 \overset{\text{(ii)}}{=} \mu\left([0,1]^n\right) \overset{\text{(i)}}{\leq} \mu(B) = \mu\Big(\bigcup_{r \in [-1,1]^n \cap \mathbb{Q}^n} (A + r)\Big) \overset{\text{(iv)}}{=} \sum_{r \in [-1,1]^n \cap \mathbb{Q}^n} \mu(A + r)$$
$$\overset{\text{(iii)}}{=} \sum_{r \in [-1,1]^n \cap \mathbb{Q}^n} \mu(A).$$

Dann, aus $B \subset [-1, 2]^n$ folgt

$$1 \leq \sum_{r \in [-1,1]^n \cap \mathbb{Q}^n} \mu(A) = \mu(B) \overset{\text{(i)}}{\leq} \mu([-1, 2]^n) = 3^n,$$

und daraus folgt ein Widerspruch, da für $\mu(A) = 0$ oder $\mu(A) < 0$ wird die erste Ungleichung verletzt, und für $\mu(A) > 0$ wird die zweite Ungleichung verletzt.

$\square$

Notation: $[0,\infty] := \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

Bemerkung: Sei jetzt $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ "(σ–)Additiv", dann für $C \subset D \subset X$ folgt aus

$$\mu(D) = \mu(C \cup (D \setminus C)) = \mu(C) + \mu(D \setminus C)) \geq \mu(C),$$

dass μ "Monoton" ist.

Korollar 46.2 (zur Bemerkung)
Es ist nicht möglich, eine Abbildung $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ zu definieren, die die Eigenshaften von Quaderwert, Translationsinvarianz und σ–Additivität erfüllt.

Schlussfolgerung: Die betrachtete Mengen müssen auf geeignete Systeme $S \subset \mathcal{P}(X)$ eingeschränkt werden.

Definition 46.3
Ein Mengensystem (oder Mengenfamilie) $S \subset \mathcal{P}(X)$ heißt

(i) Ring*:*
falls $\emptyset \in S$, und aus $A, B \in S \implies A \cup B,\ A \setminus B \in S$.

(ii) Algebra*:*
falls S ein Ring ist, und aus $A \in S \implies A^c := X \setminus A \in S$.

(iii) σ–Algebra*:*
falls S ein Algebra ist, und aus $A_i \in S$, $i \in \mathbb{N}$, $\implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in S$.

Bemerkung: Diese Eigenschaften sind realisierbar.

Beispiel: (Leicht zu beweisen)

- $\{\emptyset, X\} = S$ ist eine σ–Algebra.Für $A \subset X$ ist $\{\emptyset, A\}$ ein Ring, und $\{\emptyset, A, A^c, X\}$ eine σ–Algebra.
- $S := \{\bigcup_{i=1}^{n}[a_i, b_i),\ a_i \leq b_i \in \mathbb{R}\}$ ist ein Ring.
- $\mathcal{P}(X)$ ist eine σ–Algebra.
- $S := \{A \subset X$ mit A oder A^c abzählbar$\}$ ist eine σ–Algebra.

Satz 46.4

(i) Die Eigenschaft, σ–Algebra zu sein, bleibt erhalten unter endlichen oder unendlichen Schnittbildungen. Also

$$S_i, i \in I \quad \sigma\text{–Algebren} \qquad \implies S := \bigcap_{i \in I} S_i \quad \text{ist auch } \sigma\text{–Algebra.}$$

(ii) Für beliebiges *Mengensystem $S \subset \mathcal{P}(X)$ nennt man*

$$\mathcal{A}_\sigma(S) := \bigcap_{\tilde{S}\ \sigma\text{–Algebra}\ :\ S \subset \tilde{S}} \tilde{S}$$

die durch S erzeugte σ–Algebra.

*(iii) Speziell mit $S := \mathcal{O}(X) :=$ Menge aller offenen Teilmengen in X oder $S := \mathcal{F}(X) :=$ Menge aller geschlossenen Teilmengen von X, erhält man das System $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}(X)) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{F}(X))$ der sogenannten **Borel–Mengen**.*

Beweis:

Übung. □

Definition 46.5
Sei S ein Ring. Eine Funktion $\mu : S \to [0, \infty]$ heißt

- ***Inhalt** falls:*
  - *(i)* $\mu(\emptyset) = 0$.
  - *(ii)* $A, B \in S$, $A \cap B = \emptyset \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
- ***σ–Inhalt** falls:*
  - *(i)* $\mu(\emptyset) = 0$.
  - *(ii)* $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset S$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in S$ *und* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *für* $i \neq j \implies \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.
  *Diese Eigenschaft heißt σ–*Additivität.
- ***Maß** falls: μ σ–Inhalt auf eine σ–Algebra S.*

Satz 46.6
***Eigenschaften von Inhalt** μ **auf Ring** S:*

(i) $A, B \in S$, $A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$. *(Monotonie)*

(ii) $A, B \in S \implies \mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$. *(de Moivre)*

(iii) $A_i \in S$, $1 \leq i \leq m \implies \mu(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) \leq \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i)$. *(Subadditivität)*

(iv) $A_i \in S$ *paarweise disjunkt*, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in S \implies \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$. *($\sigma$–Superaditivität)*

Beweis:

(i) $A \cup (B \setminus A) = B \overset{\text{Add.}}{\implies} \mu(B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0} \geq \mu(A)$

(ii) $B = (B \setminus A) \cup (B \cap A) \implies \mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(B \cap A)$.
$A \cup (B \setminus A) = A \cup B \implies \mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(A \cup B)$
$\implies \mu(A) + \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) + \mu(B \cap A) = \mu(A \cup B) + \mu(B \cap A)$.

(iii) Definiere

$$B_i := A_i \setminus \{A_1 \cup A_2 \cup \dots A_{i-1}\} \implies B_i \cap B_j = \emptyset, \quad \bigcup_{i=1}^{m} B_i = \bigcup_{i=1}^{m} A_i, \quad B_i \subset A_i$$

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{m} B_i) \overset{\text{Add.}}{=} \sum_{i=1}^{m} \mu(B_i) \overset{\text{Monot.}}{\leq} \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i).$$

(iv) Für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ gilt wegen monotonie

$$\sum_{i=1}^{m} \mu(A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) \leq \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \implies \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leq \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i).$$

Satz 46.7
Eigenschaften von σ–Inhalten auf Ring S:

(i) $A_i \in S$, $i \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in S \implies \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$. *(σ–Subadditivität)*

(ii) $A_i \in S$, $i \in \mathbb{N}$, $A_1 \subset A_2 \subset \ldots A_{i-1} \subset A_i$ *und* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in S$
$\implies \lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$. *(Stetigkeit von unten)*

(iii) $A_i \in S$, $i \in \mathbb{N}$, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots A_{i-1} \supset A_i$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in S$ *und* $\mu(A_1) < \infty$
$\implies \lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$. *(Stetigkeit von oben)*

Beweis:

(i)

$$B_i = A_i \setminus \{A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_{i-1}\} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$
$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

(ii)

$$B_i = A_i \setminus A_{i-1}, \quad B_1 = A_1$$
$$\mu(A_m) = \mu(\bigcup_{i=1}^{m} B_i) = \sum_{i=1}^{m} \mu(B_i) \xrightarrow[m\to\infty]{} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i).$$

(iii) Durch Rückführung auf (ii). Setze $B_i = A_1 \setminus A_i$, dann

$$B_1 = \emptyset \subset B_2 = A_1 \setminus A_2 \subset B_3 = A_1 \setminus A_3 \subset \ldots B_i = A_1 \setminus A_i \subset B_{i+1} = A_1 \setminus A_{i+1}$$
$$\implies \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = A_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Nach (ii) ist
$$\lim_{i\to\infty} \mu(B_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \mu(A_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu(A_1) - \mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i).$$

$\mu(B_i) = \mu(A_1 \setminus A_i) = \mu(A_1) - \mu(A_i)$ da $A_i \subset A_1$. Dann folgt

$$\lim_{i\to\infty} \mu(A_1) - \mu(A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(B_i) = \mu(A_1) - \mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$$

$$\implies \mu(A_i) \xrightarrow[i\to\infty]{} \mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i).$$

□

Idee: Maße lassen sich als Restriktionen von äußeren Maßen auf messbaren Mengensystemen definieren. Die äußeren Maße lassen sich aus Inhalten auf Ringen $S \subset \mathcal{P}(X)$ definieren. Zunächst Restriktionsschritt nach Carathéodory.

Definition 46.8
Eine Funktion $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ *heißt* äußeres Maß, *falls*

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(ii) $A \subset B \subset X \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$. *(Monotonie)*

(iii) $\mu^*(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu^*(A_i)$. *($\sigma$–Subadditivität)*

Lemma 46.9
Sei $S \subset \mathcal{P}(X)$ *ein Ring,* $\mu : S \to [0,\infty]$ *ein Inhalt auf* S*, und* $A \in X$*, dann definiert*

$$\mu^*(A) := \inf\{\sum_{i=1}^\infty \mu(A_i) : \quad A_i \in S\,, A \subset \bigcup_{i=1}^\infty A_i\},$$

mit $\inf\{\emptyset\} := \infty$*, ein* äußeres Maß.

Beweis:

$\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ ist eindeutig definiert. Eigenschaften:

(i) Es gilt per Definition $\emptyset \in S$, also $\mu^*(\emptyset) \leq \mu(\emptyset) = 0 \implies \mu^*(\emptyset) = 0$.

(ii) Jede Überdeckung von B ist auch eine Überdeckung von A, da $A \subset B \subset \bigcup_{i=1}^\infty B_i$. Daraus folgt

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{i=1}^\infty \mu(A_i) : \quad A_i \in S\,, A \subset \bigcup_{i=1}^\infty A_i\}$$
$$\leq \inf\{\sum_{i=1}^\infty \mu(B_i) : \quad B_i \in S\,, B \subset \bigcup_{i=1}^\infty B_i\} = \mu^*(B).$$

(iii) Sei $A := \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ und $\varepsilon > 0$. Zu jedem $i \in \mathbb{N}$ sei $\bigcup_{j=1}^\infty C_{ij} \supset A_i$ eine Überdeckung von A_i so dass $\sum_{j=1}^\infty \mu(C_{ij}) \leq \mu^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$.

Dann ist $\bigcup_{i,j=1}^\infty C_{ij} \supset A$ eine (abzählbare) Überdeckung von A durch Mengen in S, und es gilt $\mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \mu(C_{ij}) \leq \sum_{i=1}^\infty (\mu^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}) \leq (\sum_{i=1}^\infty \mu^*(A_i)) + \varepsilon$.

Da ε beliebig klein sein darf, folgt die Behauptung. □

Definition 46.10
Sei $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ *äußeres Maß. Eine Menge* $A \subset X$ *heißt* μ^*–messbar, *falls*

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c),$$

für alle $E \subset X$.

Beispiel: Sei Ring $\mathcal{R} := \{[a,b) \subset \mathbb{R} \text{ mit } -\infty \leq a \leq b < \infty\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ mit $\mu([a,b)) = (b-a)$.
Behauptung: $\mu^*(\mathbb{Q}) = 0$ und damit $\mathbb{Q}$ messbar bezüglich μ^*.

Beweis:

Betrachte Aufzählung $\mathbb{Q} = \{q_i\}_{i=1}^{\infty}$ und Überdeckung durch $A_i = [q_i, q_i + \varepsilon 2^{-i})$ für festes $\varepsilon > 0$ und $i = 1 \dots \infty$.
$\mathbb{Q} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i \in \mathcal{R} \implies \mu^*(\mathbb{Q}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-i} = \varepsilon$
$\implies \mu^*(\mathbb{Q}) = 0$, da ε beliebig klein sein darf.
$E \subset \mathbb{R} \implies \mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap \mathbb{Q}) + \mu^*(E \cap \mathbb{Q}^c) = 0 + \mu^*(E \cap \mathbb{Q}^c) \leq \mu^*(E)$ wegen Monotonie.
Also gilt Gleichheit $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap \mathbb{Q}) + \mu^*(E \cap \mathbb{Q}^c)$ und $\mathbb{Q}$ ist μ^*–messbar. □

Satz 46.11 (Carathéodory)
Sei $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ äußeres Maß. *Die Menge aller* μ^**–messbaren Mengen* $A \subset X$ *bilden eine* σ*–Algebra* $S_{\mu^*} =: S$ *und die Restriktion* $\overline{\mu} = \mu^*\big|_{S_{\mu^*}}$ *von* μ^* *auf* $S \subset \mathcal{P}(X)$ *ist ein Maß.*

Beweis:

Nach Definition (von μ^*–messbaren Mengen) gilt $A \in S \iff A^c \in S$.
$\emptyset \in S$ ist klar. Wegen $B \setminus A = (A \cup B^c)^c$, für die Algebra–Eigenschaft ist nur noch zu zeigen, dass $A, B \in S \implies A \cup B \in S$.

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) && \text{da } B\ \mu^*\text{–messbar ist} \\ &= \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c \cap A) + \mu^*(E \cap B^c \cap A^c) && \text{da } A\ \mu^*\text{–messbar ist.} \end{aligned}$$

Die Vereinigung $(E \cap B) \cup (E \cap B^c \cap A) = E \cap (A \cup B)$ ist leicht nachzuprüfen.
Diese ergibt wegen Subaddititivität

$$\mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c \cap A) \geq \mu^*(E \cap (A \cup B)).$$

Einsetzen in obige Gleichung ergibt

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c).$$

Wegen Subadditivität gilt auch

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c),$$

und somit die Gleichheit, die die μ^*–Messbarkeit von $A \cup B$ garantiert.

Zwischenergebnis: S ist Algebra. Zu zeigen bleibt die σ–Algebra–Eigenschaft.
Sei

$$A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad \text{mit} \quad A_i \in S \quad \text{und o.B.d.A.} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{falls } i \neq j \quad .$$

Dann ist $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $n \in \mathbb{N}$, eine monoton wachsende Mengenkette von μ^*–messbaren Mengen.

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c) \overset{\text{Monot.}}{\geq} \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap A^c) && \text{da } B_n \subset A \text{ und } B_n^c \supset A^c \\ \mu^*(E \cap B_n) &= \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n^c) && \text{da } A_n\ \mu^*\text{–messbar} \\ &= \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1}) \\ &= \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap A_{n-1}) + \mu^*(E \cap B_{n-2}) = \dots \\ \dots &= \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i). \end{aligned}$$

Einsetzen in obige Ungleichung ergibt

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A^c) + \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i)$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \qquad \mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A^c) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_i) \overset{\text{Subadd.}}{\geq} \mu^*(E \cap A^c) + \mu^*(E \cap A).$$

Die Umkehrung $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A^c) + \mu^*(E \cap A)$ folgt aus der Subadditivität, so dass die Gleichheit entsteht. Es folgt $A \in S$. Also ist S eine σ–Algebra.

Noch zu zeigen: Maßeigenschaften von μ^* auf S.

$$\begin{array}{lrl}
\text{Additivität} & A \cap B = \emptyset, & A, B \in S \\
 & \mu^*(A \cup B) &= \mu^*((A \cup B) \cap B) + \mu^*((A \cup B) \cap B^c) \quad \text{da } B\ \mu^*\text{–messbar} \\
 & &= \mu^*(B) + \mu^*(A) \\
\sigma\text{–Additivität} & A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i & \text{mit} \quad A_i \in S, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{falls } i \neq j \\
 & \mu(A)^* &= \mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \geq \mu^*(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i) \quad \text{für beliebiges } n \\
n \to \infty \quad \text{ergibt} & \mu^*(A) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) \\
\mu^*\ \sigma\text{–subadditiv} & \mu^*(A) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i),
\end{array}$$

und somit Gleichheit, d.h. σ–Additivität. □

Definition 46.12
Ein Maß μ auf eine σ–Algebra $S \subset \mathcal{P}(X)$ heißt

(i) vollständig, *falls aus $A \subset B \in S$ mit $\mu(B) = 0$, auch $A \in S$ mit $\mu(A) = 0$ folgt.*

(ii) endlich, *falls $\mu(X) < \infty$.*

(iii) σ–endlich, *falls $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ mit $A_i \in S$, $\mu(A_i) < \infty$.*

Korollar 46.13
Jedes nach Satz 46.11 konstruierte Maß ist vollständig.

Beweis:

$A \subset B \in S$ mit $\mu(B) = 0 = \mu^*(B) \implies \mu^*(A) = 0 \implies \mu^*(A \cap E) = 0$ für $E \subset X$.
$E \subset X \implies \mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = 0 + \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E)$ wegen Monotonie. Also gilt Gleichheit $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ und A ist μ^*–messbar und deshalb $A \in S$. □

Bemerkung: Beispiele für nicht vollständige Maße treten speziell bei der Konstruktion von Produktmaßen auf.

Satz 46.14
Sei μ^* das nach Lemma 46.9 aus Inhalt μ auf Ring $\mathcal{R}$ konstruierte äußere Maß und $\overline{\mu}$ das nach Satz 46.11 daraus konstruierte Maß auf der σ–Algebra S. Dann gilt $\mathcal{R} \subset S$, d.h. alle $A \subset \mathcal{R}$ sind μ^*–messbar. Ist μ schon ein σ–Inhalt, dann gilt $\mu = \overline{\mu}_{|\mathcal{R}}$.

Beweis:

Betrachte $A \in \mathcal{R}$ und $E \subset X$. Falls $\mu^*(E) = \infty$ folgt aus Subadditivität $\mu^*(E \cap A) = \infty$ oder $\mu^*(E \cap A^c) = \infty$ und damit Gleichheit.

Andernfalls sei $\mu^*(E) < \infty$, dann existiert Überdeckung $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ mit $A_i \in \mathcal{R}$ und $\mu^*(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) - \varepsilon$.
Dann gilt $A_i = (A_i \cap A) \cup (A_i \cap A^c) = \underbrace{(A_i \cap A)}_{\in \mathcal{R}} \cup \underbrace{(A_i \setminus A)}_{\in \mathcal{R}}$

$\implies \mu(A_i) = \mu(A_i \cap A) + \mu(A_i \setminus A)$

(Einsetzen) $\quad \varepsilon + \mu^*(E) \geq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \cap A) + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \setminus A) \geq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i \cap A) + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i \setminus A)$

(σ–Subadditivität) $\quad \geq \mu^*(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \cap A) + \mu^*(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \setminus A)$

(Monotonie) $\quad \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$.
Da ε beliebig klein sein darf, folgt

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) \cup \mu^*(E \cap A^c) \overset{\text{Subadditivität}}{\implies} \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) \cup \mu^*(E \cap A^c)$$

$$\implies A \text{ ist messbar } \implies \mathcal{R} \subset S.$$

Sei jetzt μ ein σ–Inhalt. Sei $A \in \mathcal{R} \implies \mu^*(A) = \overline{\mu}(A) \leq \mu(A)$.
Zu zeigen ist, dass $\mu^*(A) < \mu(A)$ zum Widerspruch führt. Wenn das so wäre, müsste eine Überdeckung $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset A$ existieren, mit $A_i \in \mathcal{R}$ und

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) < \mu(A)$$

O.B.d.A. sei die Überdeckung disjunkt ($A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$), ansonsten betrachte disjunkte Überdeckung $\tilde{A}_i := A_i \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} A_j \in \mathcal{R}$. Dann folgt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \overset{\text{Monot.}}{\geq} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\underbrace{A_i \cap A}_{\in \mathcal{R}}) \overset{\sigma\text{–Add.}}{=} \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap A) = \mu(A)$$

$\implies \overline{\mu}(A) < \mu(A)$ ist Widerspruch, d.h. $\mu^*(A) = \overline{\mu}(A) = \mu(A)$. $\square$

Lemma 46.15
Das aus μ auf $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ konstruierte äußere Maß μ^* ist regulär in dem Sinne, dass für alle $E \subset X$ ein A in der von $\mathcal{R}$ erzeugten σ–Algebra S_0 existiert, so dass

$$\mu^*(E) = \mu^*(A) \quad \textit{mit} \quad E \subset A \in S_0 \subset S$$

Beweis:

Wegen Monotonie gilt es auszuschließen, dass

$$\mu^*(E) < \inf\left(\mu^*(A),\ E \subset A \in S_0\right),$$

was nur für $\mu^*(E) < \infty$ eintreten kann. Dann existiert wiederum eine disjunkte Überdeckung $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ mit $A_i \in \mathcal{R}$. Es folgt

$$\mu^*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) < \inf\left(\mu^*(A),\ E \subset A \in S_0\right)$$

O.B.d.A. seien die A_i disjunkt und da $\hat{A} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in S_0 \subset S$ folgt

$$\overline{\mu}(\hat{A}) = \mu^*(\hat{A}) < \inf\left(\mu^*(A),\ E \subset A \in S_0\right).$$

Das ist ein Widerspruch. $\square$

Satz 46.16 (Vervollständigung eines Maßes)
Sei μ ein Maß auf $S \subset \mathcal{P}(X)$ und definiere

$$N := \left\{B \subset X \mid \exists\, \overline{B} \in S:\ \overline{B} \supset B \ \wedge\ \mu(\overline{B}) = 0\right\}$$

die Familie der Nullmengen. Dann ist

$$\overline{S} := \left\{A \cup B:\ A \in S,\ B \in N\right\}$$

eine σ–Algebra, und die Funktion

$$\overline{\mu}(E) = \mu(A) \quad \textit{für} \quad E = A \cup B \quad \textit{mit} \quad A \in S,\ B \in N$$

ein vollständiges Maß auf $\overline{S}$.

Beweis:

σ–Abgeschlossenheit:

$$\begin{aligned}
\text{Sei}\quad E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\,,\ E_i = A_i \cup B_i\,, \quad &\text{mit} \quad A_i \in S \quad \text{und} \quad B_i \subset \overline{B}_i \in \mu^{-1}(0) \\
\implies E = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = A \cup B \quad &\text{mit} \\
A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in S \quad \text{und} \quad B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \subset \overline{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{B}_i,&
\end{aligned}$$

wobei $\overline{B}_i$ und $\overline{B}$ messbar, so dass

$$\mu(\overline{B}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\overline{B}_i) = 0.$$

$\square$

Also gilt $E \in \overline{S}$, da $A \in S$, $B \in N$.

Abgeschlossenheit bzgl. Komplementierung:

$$
\begin{aligned}
(A \cup B)^c &= A^c \cap B^c,\ B \subset \overline{B} \\
& \qquad\qquad B^c = \overline{B}^c \cup (\overline{B} \setminus B),\ \overline{B} \setminus B \in N \\
(A \cup B)^c &= A^c \cap (\overline{B}^c \cup (\overline{B} \setminus B)) \\
&= \underbrace{A^c \cap \overline{B}^c}_{\in S} \cup \underbrace{(A^c \cap \overline{B} \setminus B)}_{\in N \text{ da Teilmenge von } \overline{B}} \in \overline{S}.
\end{aligned}
$$

Zu zeigen bleibt σ–Additivität von $\overline{\mu}$:

$$
\text{Sei} \quad E \in \overline{S}, \implies E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cup B_i) \quad \text{mit} \quad (A_i \cup B_i) \cap (A_j \cup B_j) = \emptyset \quad \text{für} \quad i \neq j
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\mu}(E) &= \overline{\mu}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cup \underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i}_{\in N}) \overset{\text{Def}}{=} \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \\
&\overset{\sigma\text{–Add.}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_i \cup B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mu}(E_i).
\end{aligned}
$$

$\implies$ $\overline{\mu}$ auch σ–Additiv und damit Maß.

Zum Beweis der Vollständigkeit von $\overline{\mu}$ betrachte $F \subset X$

$$
\begin{aligned}
& F \subset A \cup B \in \overline{S} \quad \text{mit} \quad \overline{\mu}(A \cup B) = \mu(A) = 0 \\
& \implies F \subset A \cup \overline{B} \in S \implies \mu(A \cup \overline{B}) \leq \mu(A) + \mu(\overline{B}) = 0 \\
& \implies F \in N \subset \overline{S}.
\end{aligned}
$$

Wohldefiniertheit von $\overline{\mu}$:

$$
\text{Sei} \quad E \in \overline{S},\ E = A \cup B = C \cup D \quad \text{mit} \quad B, D \in N,\ A, C \in S.
$$

Zu zeigen ist, dass $\mu(A) = \mu(C)$:

$$
\begin{aligned}
& \text{Sei} \quad \overline{D} : D \subset \overline{D} \quad \text{mit} \quad \mu(\overline{D}) = 0 \implies \mu(A) = \mu(A \cap (C \cup \overline{D})) \\
& \overset{\text{Subadd.}}{\leq} \mu(A \cap C) + \mu(A \cap \overline{D}) \overset{\text{Subadd.}}{\leq} \mu(A \cap C) + 0 \leq \mu(A). \\
& \implies \mu(A) = \mu(A \cap C).
\end{aligned}
$$

Das selbe Argument wiederholt mit C ergibt: $\mu(C) = \mu(C \cap A)$.

$$
\implies \overline{\mu}(A \cup B) = \mu(A) = \mu(C) = \overline{\mu}(C \cup D).
$$

Satz 46.17

Sei μ ein σ–Inhalt auf dem Ring $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ und μ^* ein durch μ auf $\mathcal{P}(X)$ erzeugte äußeres Maß. $S_0 = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R}) \subset \mathcal{P}(X)$ ist die durch $\mathcal{R}$ erzeugte σ–Algebra mit $\mu_\sigma = \mu^*_{|S_0}$. Sei $\overline{S}_0$ die Erweiterung von S_0 gemäß dem Satz 46.16. Sei S das System der μ^*–messbaren Elemente von $\mathcal{P}(X)$.

Falls μ σ-endlich gilt: $\overline{S}_0 = S$.

Beweis:

(i) $\overline{S}_0 \subset S$:

$E \in \overline{S}_0 \implies E = A \cup B \quad \text{mit} \quad A \in S_0 \quad \text{und} \quad B \subset \overline{B} \in S_0 \quad \text{mit} \quad \mu^*(B) = \mu^*(\overline{B}) = 0$
$A \in S \supset S_0, \quad \mu^*(B) = 0 \implies B \in S$ da alle μ^*–Nullmengen μ^*– messbar sind
$\implies E = A \cup B \in S.$

(ii) $S \subset \overline{S}_0$:

$$E \in S \overset{46.15}{\implies} \exists A \in S_0 \quad \text{mit} \quad A \supset E \quad \text{so dass} \quad \mu^*(A) = \mu^*(E) = \overline{\mu}(E).$$

Da E μ^*–messbar ist, folgt $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) = \mu^*(E) + \mu^*(A \setminus E)$.
Sein jetzt $\mu^*(E) < \infty$, dann existiert nach 46.15 ein $B \in S_0$, so dass $B \supset A \setminus E$ und $\mu^*(B) = \mu^*(A \setminus E) = \mu^*(A) - \mu^*(E) = 0$.

Also gilt schließlich
$$E = \underbrace{(A \setminus B)}_{\in S_0} \cup \underbrace{(E \cap B)}_{\in N \text{ da } \mu^*(B)=0} \in \overline{S}_0.$$

Sei jetzt $\mu^*(E) = \infty$. Es folgt aus vorausgesetzter σ–Endlichkeit

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \quad \text{mit} \quad X_i \in \mathcal{R} \quad \text{wobei} \quad \mu(X_i) < \infty.$$

Sei $E_i = E \cap X_i$, dann nach 46.15 gibt es $D_i \in S_0 \subset \overline{S}_0$ mit $(E \cap X_i) \subset D_i$ und $\mu_\sigma(D_i) = \mu^*(D_i) = \mu^*(E_i) = \mu^*(E \cap X_i) \leq \mu^*(X_i) \overset{46.14}{=} \mu(X_i) < \infty$, da μ σ-endlich.
Es folgt für $C_i := D_i \setminus (E \cap X_i)$ dass $\mu^*(C_i) = \mu^*(D_i) - \mu^*(E \cap X_i) = 0$.
Es gibt nach 46.15 $\overline{C}_i \in S_0$ mit $\mu_\sigma(\overline{C}_i) = \mu^*(\overline{C}_i) = \mu^*(C_i) = 0$. Also $C_i \in N \subset \overline{S}_0$.
Es folgt $E_i = E \cap X_i = D_i \setminus C_i \in \overline{S}_0$.

Daraus folgt
$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \overline{S}_0.$$
□

Satz 46.18 (Eindeutigkeit der Erweiterung)
Falls μ ein σ–endlicher σ–Inhalt auf $\mathcal{R}$ ist, dann exisitiert genau ein erweitertes Maß μ_σ auf der von $\mathcal{R}$ erzeugten σ–Algebra $S_0 = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})$.

Beweis:

Annahme: Sei $\tilde{\mu}$ ein weiteres Maß auf S_0 mit $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$ für $A \in \mathcal{R}$. Sei μ^* wiederum das durch μ erzeugte äußere Maß auf $\mathcal{P}(X)$. Für beliebiges $A \in S_0$ gilt

$$\mu_\sigma(A) = \mu^*(A) = \inf\left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\right) \quad \text{mit } A_i \in \mathcal{R} \text{ disjunkt und } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset A$$
$$= \inf\left(\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_i)\right) \overset{\tilde{\mu}\ \sigma\text{–Add.}}{=} \inf\left(\tilde{\mu}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)\right) \geq \tilde{\mu}(A),$$

da $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ und $\tilde{\mu}$ auch monoton. Also gilt $\mu_\sigma(A) \geq \tilde{\mu}(A)$ für $A \in S_0$.

Sei zuerst $\overline{A} \supset A$ mit $\overline{A} \in \mathcal{R}$ und $\mu_\sigma(\overline{A}) = \tilde{\mu}(\overline{A}) < \infty$.
Da $\overline{A} \setminus A \in S_0$, es gilt $\tilde{\mu}(\overline{A} \setminus A) \leq \mu_\sigma(\overline{A} \setminus A)$.
Wegen Additivität und $\mu_\sigma(\overline{A}) = \tilde{\mu}(\overline{A}) = \mu(\overline{A}) < \infty$, es gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(\overline{A} \setminus A) + \tilde{\mu}(A) &= \tilde{\mu}(\overline{A}) = \mu_\sigma(\overline{A}) = \mu_\sigma(\overline{A} \setminus A) + \mu_\sigma(A) \\ \implies \; & \tilde{\mu}(A) - \mu_\sigma(A) = \mu_\sigma(\overline{A} \setminus A) - \tilde{\mu}(\overline{A} \setminus A) \geq 0 \\ \implies \; & \tilde{\mu}(A) \geq \mu_\sigma(A). \end{aligned}$$

Es folgt $\mu_\sigma(A) = \tilde{\mu}(A)$ für $A \in S_0$.

Da μ σ–endlich vorausgesetzt ist, gilt $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ mit $X_i \subset \mathcal{R}$, $\mu(X_i) < \infty$

$$\implies A \in S_0 \implies A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap X_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

mit $A_i \in S_0$, $A_i \subset X_i \in \mathcal{R}$ und $\tilde{\mu}(X_i) = \mu_\sigma(X_i) = \mu(X_i) < \infty$.
Für $\overline{A} = X_i$, folgt aus obigem Beweisteil

$$\tilde{\mu}(A_i) = \mu_\sigma(A_i) \overset{\sigma\text{–Add.}}{\implies} \tilde{\mu}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \mu_\sigma(A) \quad \forall A \in S_0.$$

$\square$

§47 Lebesgue Maß auf $\mathbb{R}^n$

Betrachte halboffenen *Quader*

$$\begin{aligned} & Q = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \dots [a_n, b_n) \subset \mathbb{R}^n \qquad \text{mit} \quad -\infty < a_i \leq b_i < \infty \\ \text{d.h.} \quad & Q = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i < b_i \text{ für } i = 1 \dots n\} \end{aligned}$$

und entsprechende *Figuren* A,

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} Q_i \quad \text{mit disjunkten Quadern } Q_i.$$

Die Figuren bilden einen Ring, aber keine Algebra, da nur Differenzen, aber keine Komplemente enthalten sind. Der Inhalt λ_n ist definiert durch

$$\lambda_n(Q) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \implies \lambda_n(Q) = 0 \quad \text{falls} \quad a_i = b_i \quad \text{für ein } i \quad \iff Q = \emptyset,$$

und entsprechend für Figuren

$$\tilde{\lambda}_n(A) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_n(Q_i) \in [0, \infty).$$

Lemma 47.1
$\tilde{\lambda}_n$ ist auf $\mathcal{R}$ ein σ–endlicher σ–Inhalt.

Beweis:

siehe Übung.

Definition 47.2
Sei λ_n^* das durch $\tilde{\lambda}_n$ auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ erzeugte äußere Maß, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ die λ_n^*–messbaren Mengen in $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda_n := (\lambda_n^*)_{|\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$ das entsprechende Lebesgue–Maß.

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist die von $\mathcal{R}$ erzeugte σ–Algebra der sogenannten Borel–Mengen,
$\overline{\lambda}_n := (\lambda_n)_{|\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}$ *ist das Borel–Lebesgue Maß* .

Bemerkung: Nach Satz 46.17 und 46.18 ist $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ die Vervollständigung von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ durch Nullmengen und $\overline{\lambda}_n$ die einzige Erweiterung von $\tilde{\lambda}_n$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Satz 47.3 (Notwendige und hinreichende Bedingung für Lebesgue–Messbarkeit)
$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ gdw. es gibt für jedes $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $U_\varepsilon \supset A$ und eine abgeschlossene Menge $F_\varepsilon \subset A$, so dass

(i) $\lambda_n^*(U_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$ *und*

(ii) $\lambda_n^*(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$.

Beweis:

(i) „$\Rightarrow$“ $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es eine Überdeckung $A \subset \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ durch Figuren $A_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} Q_{ij}$ mit

$$\tfrac{\varepsilon}{2} + \lambda_n(A) = \lambda_n^*(A) + \tfrac{\varepsilon}{2} \geq \sum_{i=1}^\infty \tilde{\lambda}_n(A_i) = \sum_{i,j} \tilde{\lambda}_n(Q_{ij}) = \sum_{k=1}^\infty \tilde{\lambda}_n(Q_k) = \sum_{k=1}^\infty \lambda_n(Q_k),$$

für eine geeignete Abzählung der Q_{ij} als Q_k. Für jedes k existiert ein offenes $\tilde{Q}_k$

$$\tilde{Q}_k = (\tilde{a}_1, b_1) \times (\tilde{a}_2, b_2) \ldots \times (\tilde{a}_n, b_n) \supset Q_k$$

mit $\tilde{a}_i < a_i$ nahe genug, so dass

$$\lambda_n(\tilde{Q}_k) = \lambda_n^*(\tilde{Q}_k) = \prod_{j=1}^n (b_i - \tilde{a}_i) < \lambda_n(Q_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Einsetzen in erste Ungleichung ergibt

$$U_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^\infty \tilde{Q}_k \quad \text{offene Menge,}$$

mit Maß

$$\lambda_n^*(U_\varepsilon) = \sum_{k=1}^\infty \lambda_n^*(\tilde{Q}_k) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^\infty \lambda_n(Q_k) \leq \varepsilon + \lambda_n(A)$$
$$\Longrightarrow \lambda_n^*(U_\varepsilon \setminus A) = \lambda_n^*(U_\varepsilon) - \lambda_n(A) < \varepsilon.$$

„$\Leftarrow$" Sei $B = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} U_{1/k} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ mit $\lambda_n^*(U_{1/k} \setminus A) < \frac{1}{k}$. Dann ist $A \subset B$. Sei $N := B \setminus A$. Zu zeigen ist $\lambda^*(N) = 0$, denn dann ist $A = B \setminus N \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Es gilt

$$N \subset U_{1/k} \setminus A \implies \lambda_n^*(N) \leq \lambda_n^*(U_{1/k} \setminus A) < \tfrac{1}{k} \overset{k \to \infty}{\implies} \lambda_n^*(N) = 0.$$

(ii) „$\Rightarrow$" Betrachte $X \setminus A$. Dann existiert nach (i) eine offene Menge $U_\varepsilon \supset X \setminus A$ mit $\lambda_n^*(U_\varepsilon \setminus (X \setminus A)) < \varepsilon$. Sei dann $F_\varepsilon = X \setminus U_\varepsilon$.

„$\Leftarrow$" Sei $B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_{1/k}$ mit $F_{1/k} \subset A$ abgeschlossen und $\lambda_n^*(A \setminus F_{1/k}) < \frac{1}{k}$. Setze $N := A \setminus B$

$$\overset{\text{analog}}{\implies} \lambda_n^*(N) = 0 \implies \underbrace{B}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} \cup \underbrace{N}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} = A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n).$$

□

Bemerkung:

(i) Wie aus dem Beweis ersichtlich, reicht es für die Lebesgue–Meßbarkeit von A aus, dass A nur nach (i) von außen oder nur nach (ii) von innen approximierbar ist.

(ii) Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, dann ist

$$\lambda_n(A) = \inf\{\lambda_n(U) | \, U \text{ offen}, A \subset U\} = \sup\{\lambda_n(F) | \, F \text{ abgeschlossen}, F \subset A\}.$$

(iii)

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) &\iff A = (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i) \cup N && F_i \text{ abgeschlossen, } N \text{ ist } \lambda_n\text{–Nullmenge} \\ &\iff A = (\bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i) \setminus N && U_i \text{ offen, } N \text{ ist } \lambda_n\text{–Nullmenge.} \end{aligned}$$

(iv) A ist genau dann eine λ_n^*–Nullmenge, falls $\forall \varepsilon > 0$ Würfel $W_1, W_2, \ldots$ existieren mit

$$A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \operatorname{Int}(W_i) \quad \text{und} \quad \sum_i \lambda_n(W_i) < \varepsilon.$$

Verhalten von λ_n unter Abbildungen:

Satz 47.4
Sei $T : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^1$–Abb. Ist A eine λ_n–Nullmenge, dann ist $T(A)$ eine λ_n–Nullmenge.

Beweis:

Sei $U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i$ mit $\operatorname{cl}(Q_i) \subset U$.

$$T(A) = T(A \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i) = T(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A \cap Q_i) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T(A \cap Q_i).$$

Also reicht es zu zeigen, dass $T(A \cap Q_i)$ eine λ_n–Nullmenge ist.

Sei $\varepsilon > 0$ fix und $W_1, W_2, \ldots$ Würfel mit

$$A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \operatorname{Int}(W_i) \quad \text{und} \quad \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_n(W_i) < \varepsilon$$

Sei $x \in A \cap Q_i \cap \operatorname{Int} W_j$. Bezeichne $2r_j$ die Kantenlänge von W_j und ξ_j den Mittelpunkt von W_j. Weil $T_{|\operatorname{cl}(Q_i)}$ lipschitzstetig mit Konstante M_i ist, gilt

$$\|T(\xi_j) - T(x)\| < M_i r_j, \quad \text{denn} \quad \|x - \xi_j\| < r_j.$$

Daher liegt $T(x)$ in einem Würfel $\hat{W}_j$ mit Kantenlänge $2M_i r_j$.

$$\implies \quad T(A\cap Q_i) = T\left((A\cap Q_i) \cap \bigcup_j \operatorname{Int} W_j\right) = \bigcup_j T(A\cap Q_i \cap \operatorname{Int} W_j)$$

$$\implies \quad T(A\cap Q_i) \subset \bigcup_j \operatorname{Int} \hat{W}_j \quad \text{und} \quad \sum_j \lambda_n(\hat{W}_j) \le \sum_j 2^n (r_j M_i)^n \le M_i^n \sum \lambda_n(W_i) < M_i^n \varepsilon.$$

Also ist $T(A \cap Q_i)$ λ_n–Nullmenge. □

Satz 47.5

(i) Sei $T : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$–Abbildung. Dann folgt aus $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \implies T(A) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung.

$$\implies \lambda_n(L(A)) = |\det L| \cdot \lambda_n(A) \quad \forall A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n).$$

Beweis:

(i) O.B.d.A. $A = (\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i) \cup N$, F_i abgeschlossen, N eine λ_n–Nullmenge.
Jede geschlossene Menge lässt sich als abzählbare Vereinung von K_i Kompakten mengen darstellen. also $A = (\bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j) \cup N$, K_j Kompakt, N eine λ_n–Nullmenge.
Da stetige Abbildungen kompakten Mengen (=abgeschlossen und beschränkt) in kompakten Mengen abbilden, wir erhalten

$$T(A) = (\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \underbrace{T(K_j)}_{\text{abg.}}) \cup \underbrace{T(N)}_{\text{Nullmenge}} \overset{\text{Bemerkung (iii)}}{\in} \mathcal{L}(\mathbb{R}^n).$$

(ii) a) Sei $A = Q = [a_1, b_1) \times \ldots \times [a_n, b_n)$, $|\det L| \neq 0$. Betrachte

$$\begin{aligned} P &= Q - \mathbf{a} \quad \text{mit} \quad \mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \\ &= [0, b_1 - a_1) \times \ldots \times [0, b_n - a_n). \end{aligned}$$

Setze $\mathbf{b}_j = (b_j - a_j)\mathbf{e}_j$

$$\implies P = \mathcal{P}([\mathbf{b}_1, \ldots \mathbf{b}_n]) := \{x \in \mathbb{R}^n | x = \sum x_j \mathbf{b}_j, \quad 0 \le x_j \le 1\}$$

das *Parallelepiped* von $\{\mathbf{b}_i\}$.
Dann gilt $L(P) = \mathcal{P}([L(\mathbf{b}_1), \ldots, L(\mathbf{b}_n)]) = L(Q) - L(\mathbf{a})$.

$$\begin{aligned} \implies \lambda_n(L(Q)) &\overset{\substack{\lambda_n\text{– Translations-}\\ \text{invarianz}}}{=} \lambda_n(L(P)) \overset{|\det L| \neq 0}{=} \operatorname{vol}(P([L(\mathbf{b}_1), \ldots L(\mathbf{b}_n)])) \\ &\overset{\text{Lin.Alg.}}{=} |\det(L(\mathbf{b}_1), \ldots, L(\mathbf{b}_n))| \\ &= \prod (b_i - a_i) |\det(L(\mathbf{e}_1), \ldots, L(\mathbf{e}_n))| \\ &= \lambda_n(Q) |\det L|. \end{aligned}$$

b) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beliebig. Sei $\varepsilon > 0$ und $A \subset U_\varepsilon$ offen, $U\varepsilon = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i$ Quader, mit $\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_n(Q_i) < \lambda_n^*(A) + \varepsilon$.

$$\implies \lambda_n^*(L(A)) \leq \lambda_n^*(L(U_\varepsilon)) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_n^*(L(Q_i)) =$$
$$|\det L| \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_n(Q_i) < |\det L|(\lambda_n^*(A) + \varepsilon)$$
$$\implies \lambda_n^*(L(A)) \leq |\det L|\lambda_n^*(A).$$

c) Sei jetzt $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Wenn $|\det L| = 0$, aus b) folgt dass $\lambda_n(L(A)) = 0$, und die Gleichung gilt.
Sein denn $|\det L| \neq 0$. Sei ε fix und $A \subset U_\varepsilon$ offen mit $\lambda_n(U_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$.

$$\implies U\varepsilon = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i, \quad Q_i \text{ Quader, mit } Q_i \cap Q_j = \emptyset,\ i \neq j.$$
$$\implies \lambda_n(L(U_\varepsilon)) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_n(L(Q_i)) \overset{\text{a) ,(} |\det L| \neq 0)}{=} |\det L| \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_n(Q_i) = |\det L|\lambda_n(U_\varepsilon).$$

$A \subset U_\varepsilon \implies |\det L|\lambda_n(A) \leq |\det L|\lambda_n(U_\varepsilon) = \lambda_n(L(U_\varepsilon))$.
Es folgt aus b) auch
$\lambda_n(L(U_\varepsilon)) \leq \lambda_n(L(A)) + \lambda_n(L(U_\varepsilon \setminus A)) \leq \lambda_n(L(A)) + |\det L|\varepsilon$
$\implies |\det L|\lambda_n(A) \leq \lambda_n(L(A)) + |\det L|\varepsilon \implies |\det L|\lambda_n(A) \leq \lambda_n(L(A))$.

Da die andere Ungleichung aus b) folgt, es gilt $\lambda_n(L(A)) = |\det L|\lambda_n(A)$.

□

Bemerkung:

(i) Ist $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine euklidische Bewegung, d.h.
$F(x) = L(x) + \mathbf{a}$ mit $L \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ (orth. Abb.) und $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$
$\implies \lambda_n(F(A)) = \lambda_n(L(A)) = \lambda_n(A)$, da $\det L = \pm 1$.

(ii) 47.4 and 47.5 (i) lassen sich direkt für Lipschitz–stetige Abbildungen verallgemeinern.

§48 Messbare Funktionen

Es soll ein Integralbegriff definiert werden, der das Riemann–Integral erweitert. Bekanntlich ist die

$$\text{Dirichlet–Funktion} \quad f : [0,1] \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ irrational} \\ 1 & x \text{ rational,} \end{cases}$$

nicht Riemann–integrierbar, da in jeder endlichen Zerlegung von $[0,1]$ jedes Teilintervall rationale und irrationale Punkte enthält.

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Es sollen Integrale für Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ definiert werden. Es muss dazu eine Teilmenge „geeigneter“ Funktionen ausgewählt werden.

Definition und Eigenschaften messbarer Funktionen:

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein messbarer Raum, $E \subset X$ beliebig.

$$\mathcal{A}_E = \mathcal{A} \cap E = \{A \cap E : A \in \mathcal{A}\},$$

$\mathcal{A}_E$ ist wieder eine σ–Algera. Die „(von $\mathcal{A}$) auf E induzierte“ σ–Algebra.

Definition 48.1
*Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \rho)$ messbare Räume, $E \subset X$. $f : E \to Y$ heißt $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$–*messbar*, wenn für alle $B \in \mathcal{B}$ gilt $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_E$.*

Es gelten folgende erste Eigenschaften:

Satz 48.2
$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \rho)$ messbare Räume

(i) Falls $\mathcal{B}$ von einem System $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$ erzeugt wird, dann ist $f : X \to Y$ genau dann $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$–messbar, falls $\forall S \in \mathcal{S} : f^{-1}(S) \in \mathcal{A}$, bzw. allgemeiner

$$E \subset X, f : E \to Y \quad \textit{messbar} \qquad \iff \forall S \in \mathcal{S} : f^{-1}(S) \in \mathcal{A}_E.$$

(ii) $f : X \to Y$ $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$–messbar, $E \subset X$, dann ist auch $f_{|E} : E \to Y$ $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$–messbar.

(iii) Sei $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, $X_i \in \mathcal{A}$ eine Überdeckung, $f : X \to Y$ eine Abbildung mit $f_{|X_i}$ $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$–messbar für alle $i \in \mathbb{N}$, dann ist auch f $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$–messbar.

(iv) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ sei ein vollständiger Maßraum, $N \subset X$ eine Nullmenge, dann ist jede Abbildung $f : N \to Y$ $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$–messbar. Insbesondere gilt: Sind $f, g : X \to Y$ Abbildungen mit f messbar, g ist nur auf einer Nullmenge $N \subset X$ von f verschieden, dann ist auch g messbar.

Beweis:

(i) Betrachte $\tilde{\mathcal{B}} = f_*(\mathcal{A}_E) = \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_E\}$, diese ist eine σ–Algebra.

$$\mathcal{S} \subset \tilde{\mathcal{B}} \implies \mathcal{B} = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S}) \subset \tilde{\mathcal{B}} \implies f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_E.$$

(ii) Für alle $B \in \mathcal{B}$ gilt

$$f_{|E}^{-1}(B) = \underbrace{f^{-1}(B)}_{\in \mathcal{A}} \cap E \in \mathcal{A}_E$$

.

(iii) $X_i \in \mathcal{A} \implies \mathcal{A}_{X_i} \subset \mathcal{A}$.

$$\forall B \in \mathcal{B} \quad (f_{|X_i})^{-1}(B) =: A_i \in \mathcal{A}_{X_i} \subset \mathcal{A} \implies f^{-1}(B) = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}.$$

(iv) 1) $f : N \to Y$, $f^{-1}(B) \subset N$ $\forall B \in \mathcal{B}$. Da $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vollständig, ist auch $f^{-1}(B)$ als Nullmenge in $\mathcal{A}$ enthalten.

2) $f, g : X \to Y$, $N = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ Nullmenge.

$$X = X_1 \cup X_2, \quad X_1 = X \setminus N, \quad X_2 = N.$$

Wende iii) und iv.1) an.

□

Lemma 48.3 (Kettenregel)
Seien $(X, \mathcal{S}, \mu)$, $(Y, \mathcal{T}, \rho)$ *und* $(Z, \mathcal{U}, \nu)$ *messbare Räume. Seien* $f : X \to Y$ $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$–messbar, $g : Y \to Z$ $(\mathcal{T}, \mathcal{U})$–messbar, *dann ist*

$$g \circ f : X \to Z$$

$(\mathcal{S}, \mathcal{U})$–messbar.

Beweis:

Sei $C \subset \mathcal{U} \implies (g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}\left(g^{-1}(C)\right)$, mit $D := g^{-1}(C) \in \mathcal{T}$ da g $(\mathcal{T}, \mathcal{U})$*–messbar*, und $f^{-1}(D) \in \mathcal{S}$ da f $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$*–messbar*. □

Bemerkung: (Wichtig!)

Ist der Raum (Y, d) ein metrischer Raum, so wird, **falls nicht anders angegeben**, die σ–Algebra der Borelmengen

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(Y) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}(Y)) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{F}(Y)).$$

verwendet.
Ab jetzt, benutzen wir folgende Definition für messbare Funktionen.

Definition 48.4
Seien $(X, \mathcal{A})$ *ein messbarer und* (Y, d) *ein metrischer Raum. Dann heißt* $f : X \to Y$ $\mathcal{A}$*–messbar, falls* f $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(Y))$*–messbar ist. Insbesondere ist* f $\mathcal{A}$*–messbar, falls* $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ *für alle offenen Teilmengen* $U \subset Y$.

Korollar 48.5
Seien $(X, \mathcal{A})$ *ein messbarer und* (Y_1, d_1), (Y_2, d_2) *metrische Räume, sowie* $h : Y_1 \to Y_2$ *stetig. Dann ist für jede* $\mathcal{A}$*–messbare Abbildung* $f : X \to Y$ *auch die Verknüpfung* $h \circ f$ $\mathcal{A}$*–messbar.*

Beweis:

Sei $V \subset Y_2$ offen. Dann ist auch $U = h^{-1}(V)$ offen und

$$(h \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(h^{-1}(V)) = f^{-1}(U) \in \mathcal{A}.$$

□

Die Borelmengen von $\mathbb{R}$ werden von den Intervallen $[a, +\infty)$ bzw. $(a, +\infty)$ erzeugt.

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_\sigma\left(\{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}\right).$$

Korollar 48.6
Seien $(X, \mathcal{A})$ *ein messbarer Raum und* $f : X \to \mathbb{R}$ *eine Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) f *ist* $\mathcal{A}$*–messbar.*

(ii) $\{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathcal{A}\ \forall a \in \mathbb{R}$.

(iii) $\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{A}\ \forall a \in \mathbb{R}$.

(iv) $\{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathcal{A}\ \forall a \in \mathbb{R}$.

(v) $\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{A}\ \forall a \in \mathbb{R}$.

Zur einfacheren Formulierung von Konvergenzaussagen erweitert man $\mathbb{R}$ durch Hinzufügen von $+\infty$ und $-\infty$ zu

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

mit den Rechenregeln:

(i) $(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$

(ii) $(\pm\infty) + a = a + (\pm\infty) = \pm\infty$

(iii) $(\pm\infty) \cdot a = a \cdot (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty & \text{, falls } a \in (0, +\infty] \\ \mp\infty & \text{, falls } a \in [-\infty, 0) \end{cases}$

und den Vereinbarungen:

$$(+\infty) + (-\infty) = (-\infty) + (+\infty) = 0 \qquad (\pm\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (\pm\infty) = 0$$

Damit ist $\overline{\mathbb{R}}$ bzgl. „+" und „·" abgeschlossen. Die Operationen sind weiterhin kommutativ, aber *nicht mehr* assoziativ.

Eine Teilmenge $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ ist offen, falls $A \cap \mathbb{R}$ offen ist und

$$+\infty \in A \implies \exists a \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad (a, +\infty] \subset A \qquad -\infty \in A \implies \exists b \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad [-\infty, b) \subset A.$$

Abbildungen $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ werden „numerische" Funktionen genannt.

Die Borelmengen von $\overline{\mathbb{R}}$ ergeben sich als

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}(\overline{\mathbb{R}})) = \{A \cup E : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ E \subset \{-\infty, +\infty\}\}.$$

Definition 48.7
Sei $(\mathcal{A}, X)$ ein messbarer Raum. Dann heißt $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$–messbar, falls f $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$–messbar ist.

Bemerkung: Die Charakterisierung $\mathcal{A}$–messbarer Funktionen in 48.6 gilt auch für numerische Funktionen.

Satz 48.8
Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum.

(i) Sind $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$–messbar, so auch $f \pm g$, $f \cdot g$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$, $|f|$.

(ii) $f = (f_1, \ldots, f_n) : X \to \mathbb{R}^n$ ist $\mathcal{A}$–messbar gdw. jedes f_i, $i = 1, \ldots, n$ $\mathcal{A}$–messbar ist.

(iii) $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}, n \in \mathbb{N}$, seien $\mathcal{A}$–messbar. Dann sind auch $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ und $\liminf_{n\to\infty} f_n$ $\mathcal{A}$–messbar.

Aus (iii) folgt, dass falls $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in X$, d.h. f ist punktweiser Grenzwert der f_n, dann dies ein messbares f ergibt, falls f_i messbar. Im Gegensatz dazu wird Stetigkeit bei (nur) punktweise Konvegenz nicht erhalten.

Beweis:

Hilfsaussage für beliebiges $a \in \overline{\mathbb{R}}$

$$N := \{x \in X : f(x) + g(x) < a\} \stackrel{!}{=} \bigcup_{y \in \mathbb{Q}} \{f(x) < y\} \cap \{g(x) < a - y\} := M$$

„$\supset$“ trivial, da $x \in M \implies f(x) < y$ und $g(x) < a - y \implies f(x) + g(x) < a - y + y = a$, so dass $x \in f^{-1}(-\infty, a)$.

„$\subset$“

$$\begin{aligned} x \in N &\implies f(x) < y < a - g(x) \quad \text{für ein} \quad y \in \mathbb{Q}, \quad \text{da die rationalen Zahlen dicht liegen} \\ &\implies f(x) < y \wedge g(x) < a - y \implies x \in M \\ &\implies N = M, \quad \text{damit gilt die Hilfsaussage.} \end{aligned}$$

(i) Laut Voraussetzung sind f, g messbar und somit alle $\{f(x) < y\}$ und $\{g(x) < a - y\}$ Elemente aus der σ–Algebra $\mathcal{A}$. Wegen deren Abgeschlossenheit bzg. abzählbarer Schnitte und Vereinigungen gilt auch $N = M \in \mathcal{A}$.

$$f - g = f + (-1)g \quad \text{messbar, da für beliebiges } c \neq 0$$
$$\{c\,g(x) < a\} = \begin{cases} \{g(x) < a/c\} & \text{falls } c > 0 \\ \{g(x) > a/c\} & \text{falls } c < 0. \end{cases}$$

Also erbt $(-1)g$ die Messbarkeit von g und damit auch $f - g$.

(ii) Da $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ von Quadern $Q = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \ldots [a_n, b_n)$ erzeugt wird, betrachte Urbild

$$\begin{aligned} f^{-1}(Q) &= \{x \in X : a_i \leq f_i(x) < b_i \quad \text{für} \quad i = 1 \ldots n\} \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}([a_i, b_i)) = \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : a_i \leq f_i(x) < b_i\}. \end{aligned}$$

Also folgt aus der Messbarkeit aller Komponentenfunktionen f_i unmittelbar die Messbarkeit der Vektorfunktion f. Umkehrung in Übung.

(iii) $\{x \in X : \sup f_n(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) > a\}$. Also folgt Messbarkeit von $\sup f_n$ aus Messbarkeit der f_n ($\implies$ inf entsprechend).
Es folgt auch

$$\begin{aligned} &\limsup_{n \to \infty} f_n(x) = \inf_m \sup_{n \geq m} f_n(x) = \inf_m \overline{f}_m \\ &\text{mit} \quad \overline{f}_m(x) = \sup_{n \geq m} f_n(x) \quad \text{messbar nach (iii) erste Aussage.} \end{aligned}$$

Damit ist $\inf_{m \geq 0} \overline{f}_m$ auch messbar. Daraus folgt, wenn

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) = \limsup_{n \to \infty} f_n(x) = \liminf_{n \to \infty} f_n(x), \quad \text{dann ist auch } f \text{ messbar.}$$

Reste siehe Übung. Hinweis für $f \cdot g$: Nutze die *Apollonius–Identität*

$$f \cdot g = \tfrac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2]. \qquad \square$$

Definition 48.9 (Einfache Funktionen)
*(auch **Treppenfunktionen**, **stückweise konstante** Funktionen gennant)*

(i) Für $A \subset X$ definiert man die charakteristische Funktion $\chi_A : X \to \{0,1\}$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } x \in A \\ 0 & \textit{falls } x \notin A. \end{cases}$$

χ_A ist offensichtlich messbar gdw. $\chi_A^{-1}(1) = A \in \mathcal{A}$.

(ii) $f : X \to \mathbb{R}$ heißt einfach, *wenn für n paarweise disjunkte Mengen $A_i \subset X$ ($A_i \cap A_j = \emptyset$ falls $i \neq j$) und reelle Koeffizienten $c_i \in \mathbb{R}$*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}(x).$$

Äquivalenterweise kann man verlangen, dass f auf X nur endlich viele unterschiedliche Werte in $\mathbb{R}$ annimmt.

Satz 48.10
Falls $f : X \to [0,\infty]$ messbar, dann ist es monoton von unten durch messbare einfache Funktion $f_k : X \mapsto [0,\infty)$ annäherbar, d.h. existieren messbare einfache $f_k(x)$, mit $f_k(x) \nearrow f(x)$ für alle $x \in X$.

Beweis: Betrachte zunächst einfache Funktionen $\varphi_k : [0,\infty) \to [0,\infty)$ mit $\varphi_k(y) \nearrow g(y) := y$ für alle $y \in [0,\infty)$, Definition der φ_k:

$$\varphi_k(y) := \begin{cases} k & \text{falls } y \geq k \\ \frac{i-1}{2^k} & \text{falls } \frac{i-1}{2^k} \leq y < \frac{i}{2^k} \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq k \cdot 2^k. \end{cases}$$

Es ist leicht zu sehen, dass φ_k $(\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}), \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$–messbar ist, für $k \in \mathbb{N}$. Dann folgt unmittelbar für $f_k(x) := \varphi_k(f(x))$, dass

$$f_k(x) = \varphi_k(f(x)) \underset{k\to\infty}{\nearrow} g(f(x)) = f(x).$$

□

Aus der Kettenregel folgt die Messbarkeit von f_k aus der Messbarkeit von f und φ_k.

Satz 48.11 (Erhaltung von Messbarkeit bei punktweiser Konvergenz)
$(X, \mathcal{A})$ messbarer, (Y, d) metrischer Raum, $f_i : X \to Y$ messbar und $f(x) = \lim_{i\to\infty} f_i(x)$ für alle $x \in X$, dann ist auch f messbar.

Beweis:

Es reicht zu zeigen, dass für alle offenen (und deswegen auch messbaren) $U \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(U)$ messbar ist. Es ist

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k, \quad U_k := \left\{ y \in Y : d(y, U^c) > \tfrac{1}{k} \right\},$$

wobei die U_k für alle k offen und damit auch messbar sind.

$$\begin{aligned} f^{-1}(U_k) &= \left\{x \in X : d(f(x), U^c) > \tfrac{1}{k}\right\} \quad \text{sowie} \quad \lim f_i(x) = f(x) \\ &= \left\{x \in X : \exists j \in \mathbb{N} \forall i \geq j : \, d(f_i(x), U^c) > \tfrac{1}{k}\right\} \\ &= \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{i=j}^{\infty} \underbrace{\left\{x \in X : d(f_i(x), U^c) > \tfrac{1}{k}\right\}}_{f_i^{-1}(U_k)}. \end{aligned}$$

Messbarkeit der $f_i^{-1}(U_k)$ folgt aus der Messbarkeit der Folgenelemente f_i. Schnitt und Vereinigung bleibt in σ–Algebra $\Longrightarrow$ f messbar.

□

Satz 48.12
Sei $E \subset X$ messbar mit $\mu(E) < \infty$. Betrachte die Funktionenfolge $f_k : E \to \mathbb{R}$, messbar und $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ für $x \in E$. Dann existieren für alle Paare $\delta > 0 < \varepsilon$ ein messbares $A \subset E$ und ein k_0, so dass $\mu(A) < \delta$ und

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \textit{für} \quad x \in E \setminus A \quad \textit{und} \quad k \geq k_0.$$

Beweis:

Betrachte

$$G_k = \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$$

und

$$E_m := \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon \quad \text{für ein } k \geq m \quad \} = \bigcup_{k=m}^{\infty} G_k.$$

Offensichtlich ist E_m eine monotone Folge von Mengen, d.h. $E_{m-1} \supset E_m \supset E_{m+1} \ldots$

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} E_m = \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ für unendlich viele } k\} = \emptyset \quad \text{wegen punkt. Konvergenz.}$$

Wegen Stetigkeit von oben nach Satz 46.6 gilt

$$\lim_{m\to\infty} \mu(E_m) = \mu(\bigcap_{m=1}^{\infty} E_m) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Also existiert ein m, so dass für $A = E_m$ gilt $\mu(A) < \delta$ und $X \in E \setminus A$ impliziert $|f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ für alle $k \geq m$. □

§49 Integration messbarer Funktionen

Einfache Funktionen sind Verallgemeinerungen von Treppenfunktionen, so dass man sinnvollerweise das Riemannintegral in $[a, b] \subset \mathbb{R}$ verallgemeinert zu:

Definition 49.1
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Seien A_k, E messbar,

$$\int_E \varphi \, d\mu := \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(A_k \cap E) \quad \text{für} \quad \varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{A_k}. \tag{1}$$

Satz 49.2 (Eigenschaften des Integrals für einfache φ)

(i) *unabhängig vom Repräsentanten von φ.* *(Eindeutigkeit)*

(ii) $\int_E (\alpha\varphi + \beta\psi) \, d\mu = \alpha \int_E \varphi \, d\mu + \beta \int_E \psi \, d\mu$. *(Linearität)*

(iii) $\int_{E_1 \cup E_2} \varphi \, d\mu = \int_{E_1} \varphi \, d\mu + \int_{E_2} \varphi \, d\mu$ *für* $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. *(Additivität bzgl. E)*

(iv) $\int_E \varphi \, d\mu \leq \int_E \psi \, d\mu$ *falls* $\varphi(x) \leq \psi(x)$ *für* $x \in E$. *(Monotonie)*

(v) $\left| \int_E \varphi \, d\mu \right| \leq \int_E |\varphi| \, d\mu \leq \mu(E) \|\varphi\|_\infty$ *für* $\|\varphi\|_\infty = \sup_{x \in E} |\varphi(x)|$.

(vi) $\int_A \varphi \, d\mu \leq \int_B \varphi \, d\mu$ *falls* $\varphi \geq 0$ *und* $A \subset B$.

wobei E messbar, φ, ψ einfach auf X und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $|\cdot|$ der übliche Betrag.

Beweis:

Einfaches Nachrechnen, eventuell in Übung.

Ziel: Integral so auf möglichst alle messbaren Funktionen erweitern, dass (i)-(vi) gültig bleiben. Abgesehen von unendlichen Werten ist Messbarkeit hinreichend und notwendig für Integrierbarkeit.

Satz 49.3
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Sei $E \subset X$ messbar, $\mu(E) < \infty$ und $f : E \to \mathbb{R}$ beschränkt mit Schranke $|f(x)| \leq M$ für $x \in E$. Dann gilt mit φ und ψ einfache Funktionen

$$\sup_{\varphi \leq f} \int_E \varphi \, d\mu = \inf_{\psi \geq f} \int_E \psi \, d\mu$$

falls f messbar. Sei zusätslich $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vollständige Maßraum, dann gilt die Gleichung genau dann wenn f messbar ist.

Beweis:

„$\Leftarrow$“ Für beliebiges, aber festes m betrachte Niveaumengen (messbar)

$$E_k = \left\{ x \in E : \tfrac{(k-1)M}{m} < f(x) \leq \tfrac{k}{m} M \right\} \quad \text{für} \quad k = -m, -m+1, \ldots, m,$$

$$\varphi_m(x) := \sum_{k=-m}^{m} \frac{(k-1)M}{m} \chi_{E_k}(x),$$

$$\psi_m(x) := \sum_{k=-m}^{m} \frac{kM}{m} \chi_{E_k}(x),$$

$$\implies \varphi_m(x) \leq f(x) \leq \psi_m(x) \quad \text{für} \quad x \in E \quad \text{Aus (49.1) folgt}$$

$$\int_E \varphi_m \, d\mu = \sum_{k=-m}^{m} \frac{(k-1)M}{m} \mu(E_k) \leq \int_E \psi_m \, d\mu = \sum_{k=-m}^{m} \frac{kM}{m} \mu(E_k)$$

$$\int_E \psi_m \, d\mu - \int_E \varphi_m \, d\mu = \int_E (\psi_m - \varphi_m) \, d\mu = \sum_{k=-m}^{m} \left(\frac{kM}{m} - \frac{(k-1)M}{m} \right) \mu(E_k)$$

$$= \sum_{k=-m}^{m} \frac{M}{m} \mu(E_k) = \frac{M}{m} \sum_{k=-m}^{m} \mu(E_k) = \frac{M}{m} \mu(E)$$

$$\inf_{\psi \geq f} \int_E \psi \, d\mu - \sup_{\varphi \leq f} \int_E \varphi \, d\mu \leq \inf_{\psi_m \geq f} \int_E \psi_m \, d\mu - \sup_{\varphi_{\tilde{m}} \leq f} \int_E \varphi_{\tilde{m}} \, d\mu$$

$$\leq \inf_{\psi_m \geq f} \int_E \psi_m \, d\mu + \inf_{\varphi_m \leq f} \int_E (-\varphi_m) \, d\mu$$

$$\leq \inf_{m \in \mathbb{N}} \int_E (\psi_m - \varphi_m) \, d\mu \leq \inf_{m \in \mathbb{N}} \frac{M}{m} \mu(E) = 0$$

$$\implies \inf_{\psi \geq f} \int_E \psi \, d\mu \leq \sup_{\varphi \leq f} \int_E \varphi \, d\mu.$$

Daraus folgt die Gleichheit wie behauptet, da aus $\varphi \leq f \leq \psi$ wegen Monotonie des Integrals bei einfachen Funktionen folgt $\int_E \varphi \, d\mu \leq \int_E \psi \, d\mu \implies \sup \leq \inf$.

„$\Rightarrow$“ Seien $\varphi_n \leq f$ eine wachsende und $\psi_n \geq f$ eine fallende Folge einfacher Funktionen, für die gilt

$$\lim_{n \to \infty} \int_E \varphi_n \, d\mu = \sup_{\varphi \leq f} \int_E \varphi \, d\mu = \inf_{\psi \geq f} \int_E \psi \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_E \psi_n \, d\mu.$$

Diese müssen nach Voraussetzung von „$\Rightarrow$“ existieren. Daraus folgt, dass

$$\int_E \psi_n \, d\mu - \int_E \varphi_n \, d\mu = \int_E (\psi_n - \varphi_n) \, d\mu \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Seien $\varphi_* = \lim_{n \to \infty} \varphi_n$ und $\psi_* = lim_{n \to \infty} \psi_n$, diese erfüllen punktweise $\varphi_*(x) \leq f(x) \leq \psi_*(x)$ und sind nach Satz 48.7 messbar.

Annahme

$$\mu(\{x \in E : \psi_*(x) > \varphi_*(x)\}) > 0,$$

dann folgt für ein $\varepsilon > 0$, dass auch

$$\mu(\underbrace{\{x \in E : \psi_*(x) > \varphi_*(x) + \varepsilon\}}_{:= A_\varepsilon}) > 0,$$

$$\text{und für alle } n: \; \psi_n(x) \geq \psi_*(x) > \varphi_*(x) + \varepsilon \geq \varphi_n(x) + \varepsilon \quad \forall x \in A_\varepsilon.$$

Dann gilt

$$\int_E (\underbrace{\psi_n - \varphi_n}_{\geq 0}) \, d\mu \geq \int_{A_\varepsilon} (\psi_n - \varphi_n) \, d\mu \geq \int_{A_\varepsilon} \varepsilon \, d\mu \geq \varepsilon \mu(A_\varepsilon) > 0.$$

Da rechte untere Schranke für alle n gilt, widerspricht dies der Voraussetzung, dass $\int_E (\psi - \varphi) \, d\mu \to 0$.

Also gilt $\mu(\{x \in E : \varphi_*(x) < \psi_*(x)\}) = 0$ und daher $\int_E \varphi_*(x) \, d\mu = \int_E \psi_*(x) \, d\mu$ und mit $\mu(\{x \in E : f(x) \neq \varphi_*(x)\}) = 0$ folgt aus 48.2(iv) dass auch f messbar ist. □

Definition 49.4
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Falls $E \subset X$ und f messbar mit f beschränkt, setze (bei $\psi \geq f$ einfache Funktion)

$$\int_E f\,d\mu := \inf_{\psi \geq f} \int_E \psi\,d\mu.$$

Falls $\mu = \lambda_n$ das Lebesgue–Maß spricht man vom Lebesgue–Integral *und schreibt einfach*

$$\int_E f\,d\mu = \int_E f(x)dx.$$

M.a.W. „Default–Maß“ ist Lebesgue–Maß.

Korollar 49.5
Falls $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann–integrierbar, dann ist f messbar und das Lebesgue–Integral ergibt den selben Wert wie das Riemann–Integral.

Beweis:

Wie beim Riemann–Integral auftretenden Unter- und Obersummen lassen sich als Integral über einfache, d.h. Treppenfunktionen interpretieren, die mit der „neuen“ Definition übereinstimmen. Konvergenz und damit Messbarkeit von f folgen.

□

Beispiel: (die Umkehrung gilt nicht)

$$\tilde{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cap [0, 1], \qquad \chi_{\tilde{\mathbb{Q}}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \tilde{\mathbb{Q}}; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

ist nicht Riemann–integrierbar auf $[0, 1]$, da alle Untersummen $= 0$ und alle Obersummen $= 1$ für beliebig feine Zerlegung.
$\chi_{\tilde{\mathbb{Q}}}$ ist Borel–messbar $\implies$ Lebesgue–messbar.

$$\chi_{\tilde{\mathbb{Q}}}^{-1}(U) = \begin{cases} [0,1] & \text{, falls } 0 \in U \ni 1 \\ \tilde{\mathbb{Q}}^c & \text{, falls } 1 \notin U \ni 0 \quad \text{für offenes } U \subset \mathbb{R} \\ \tilde{\mathbb{Q}} & \text{, falls } 0 \notin U \ni 1 \\ \emptyset & \text{, falls } 0, 1 \notin U \end{cases}$$

$\tilde{\mathbb{Q}} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{q_i\}$ mit $\tilde{\mathbb{Q}} = \{q_1, q_2, \ldots\}$ auszählen ist Borelmenge und auch $\tilde{\mathbb{Q}}^c$ und damit

$$\int_{[0,1]} \chi_{\tilde{\mathbb{Q}}}(x)dx = 0.$$

Definition 49.6
*Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Falls $f : X \to [0, \infty]$ (**nicht–negativ**) messbar und $E \subset X$ messbar, setze*

$$\int_E f\,d\mu := \sup \left\{ \int_E \varphi\,d\mu : 0 \leq \varphi \leq f, \textit{einfach} \right\}.$$

Lemma 49.7
Das obige Integral erfüllt aus 49.2 die Eigenschaften (iii),(v), (vi) und $\int_E \alpha f\,d\mu = \alpha \int_E f\,d\mu$ falls $\alpha \geq 0$.

Beweis:

Siehe Übung.

Lemma 49.8 (von Fatou)
$0 \leq f_n$ messbar, $f = \liminf_{n\to\infty} f_n$ punktweise, $E \subset X$ messbar.

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu \geq \int_E \liminf_{n\to\infty} f_n\, d\mu = \int_E f\, d\mu \qquad \left(= \sup_{\varphi \leq f \text{ einfach}} \int_E \varphi\, d\mu \right).$$

(Vergleiche $\liminf(a_n + b_n) \geq \liminf a_n + \liminf b_n$).

Beweis:

Es reicht zu zeigen, dass $\liminf \int_E f_n\, d\mu \geq \int_E \varphi\, d\mu$ für beliebiges einfaches $\varphi \leq f$.

1. Fall: $\int_E \varphi\, d\mu = \infty$. Setze $A = E \setminus \varphi^{-1}(0)$, dann ist auch $\mu(A) = \infty$. Es gibt ein $a > 0$ mit $\varphi(x) > a > 0$ für jedes $x \in A$. Konstruiere

$$A_n = \{x \in E : f_k(x) > a \quad \text{für alle} \quad k \geq n\} \implies A_n \subset A_{n+1},$$
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset A \implies \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \geq \mu(A) = \infty;$$

$$\int_E f_n\, d\mu \geq a\mu(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \implies \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu = \infty.$$

2. Fall: $0 \leq \int_E \varphi\, d\mu < \infty$. Sei $0 \leq \varepsilon$ beliebig,

$$A_n := \{x \in E : f_k(x) > (1-\varepsilon)\varphi(x) \text{ für alle } k \geq n\}$$
$$A_n \subset A_{n+1} \ldots \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset A, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} (A \setminus A_n) = \emptyset,$$

$\mu(A \setminus A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. D.h., ab einem bestimmten n_0 gilt $\mu(A \setminus A_n) < \varepsilon$ falls $n \geq n_0$. Mit $\varphi(x) \leq M$ für $x \in E$:

$$\begin{aligned}
\int_E f_n\, d\mu &\overset{f_n \geq 0 \text{ + Monot.}}{\geq} \int_{A_n} f_n\, d\mu \geq (1-\varepsilon) \int_{A_n} \varphi\, d\mu \\
&= (1-\varepsilon) \left(\int_A \varphi\, d\mu - \int_{A \setminus A_n} \varphi\, d\mu \right) \\
&\geq (1-\varepsilon) \left(\int_E \varphi\, d\mu - \varepsilon M \right) \quad \text{da} \quad \varphi(x) \leq M.
\end{aligned}$$

Für $\varepsilon \to 0$ ergibt sich genau die Behauptung. □

Definition 49.9
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Man sagt eine Eigenschaft $\mathcal{T}$ gilt μ– fast überall auf X (μ–f.ü.), wenn es eine μ–Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ gibt, so dass alle $x \in N^c = X \setminus N$ die Eigenschaft $\mathcal{T}$ haben.

Bemerkung:

Aus der Definition ergibt sich:

(i) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ sei ein vollständiger Maßraum, aus 48.2 (iv) folgt:

$$f = g \ \mu\text{– f.ü. und } f \text{ messbar} \implies g \text{ messbar.}$$

Ohne Vollständigkeit gilt im Allgemein nicht: Sei $A \subset N$, mit N messbar, $\mu(N) = 0$ und $A \notin \mathcal{A}$. Dann $\chi_A = 0 = \chi_N$ μ– fast überall auf X, aber χ_A ist **nicht** messbar.

(ii) Eine folge von Funktionen $f_n : X \to [-\infty, \infty]$ konvergiert μ– fast überall auf X gegen $f : X \to [-\infty, \infty]$, genau dann wenn eine μ–Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ existiert so dass

$$f_n(x) \to f(x) \quad \text{für alle } x \in N^c = X \setminus N.$$

(iii) $0 \leq f, g$ messbar, E messbar, $f \leq g$ μ–f.ü., dann

$$\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu.$$

(iv) $0 \leq f, g$ messbar, E messbar, $f = g$ μ–f.ü., dann

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu.$$

Korollar 49.10 (Monotone Konvergenz)
Falls $0 \leq f_n \leq f$ μ –f.ü. auf E, alle messbar, und $\liminf_{n\to\infty} f_n = f$ μ –f.ü. auf E, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

Beweis:

O.B.d.A., nach obiger Bemerkung, seien alle Eigenschaften überall in E gesichert. Dann, wegen Monotonie des Integrals folgt zunächst

$$\begin{aligned} & \int_E f \, d\mu \geq \int_E f_n \, d\mu \\ \implies & \int_E f \, d\mu \geq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu \overset{\text{Fatou}}{\geq} \int_E f \, d\mu. \end{aligned}$$

Also gilt Gleichheit und $\liminf f_n$ ist ein echter Grenzwert. □

Lemma 49.11 (Linearität des Integrals für nichtnegative Funktionen $f \geq 0 \leq g$)
Seien $0 \leq f, g$ messbar, E messbar. Es gilt für $0 \leq \alpha, \beta$ folgende Gleichheit

$$\int_E (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int_E f \, d\mu + \beta \int_E g \, d\mu.$$

Beweis:

Nach Satz 48.10 gibt es einfache Funktionen $\varphi_n \nearrow f$ und $\psi_n \nearrow g$. O.B.d.A. $\varphi_n \geq 0$ und $\psi_n \geq 0$ da sonst $\varphi_n \to \max(0, \varphi_n)$ und $\psi_n \to \max(0, \psi_n)$ ersetzt werden kann.

$$\lim_{n\to\infty} \alpha\varphi_n(x) + \beta\psi_n(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) \quad \text{auch von unten}$$

Aus monotoner Konvergenzaussage folgt

$$\int_E (\alpha f + \beta g)\, d\mu \overset{49.8}{=} \lim_{n\to\infty} \int_E (\alpha\varphi_n + \beta\psi_n)\, d\mu$$

$$\overset{49.1}{=} \lim_{n\to\infty} \alpha \int_E \varphi_n\, d\mu + \beta \int_E \psi_n\, d\mu \overset{49.8}{=} \alpha \int_E f\, d\mu + \beta \int_E g\, d\mu$$

□

Korollar 49.12
Seien $f_n \geq 0$ messbar, E messbar. Dann gilt

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n\, d\mu.$$

Beweis:

Folgt aus Anwendung von 48.10 auf Partialsummen

$$\tilde{f}_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \nearrow f(x) = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

□

Definition 49.13

(i) $f : X \to [0, \infty]$, *f messbar, heißt* integrierbar *auf $E \subset X$ falls*

$$\int_E f\, d\mu < \infty.$$

(ii) $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, *$f$ messbar, heißt integrierbar auf E, wenn* $f^+(x) := \max(0, f(x))$ *und* $f^-(x) := \max(0, -f(x))$ *beide integrierbar sind. Man setzt dann*

$$\int_E f\, d\mu := \int_E f^+\, d\mu - \int_E f^-\, d\mu,$$

da $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ nach Definition.

Lemma 49.14
Falls f, g auf E integrierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(i) $\int_E (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int_E f\, d\mu + \beta \int_E g\, d\mu$.

(ii) für messbares h folgt aus $|h| \leq g \geq 0$ dass auch h integrierbar ist mit

$$\left| \int_E h\, d\mu \right| \leq \int_E |h|\, d\mu \leq \int_E g\, d\mu < \infty.$$

Beweis:

(i) siehe Übung.

(ii)

$$
\begin{aligned}
0 &\leq h^+(x) \leq |h(x)| \leq g(x) \\
0 &\leq h^-(x) \leq |h(x)| \leq g(x) \\
E^+ &= \{x \in E : h(x) > 0\} \\
E^- &= \{x \in E : h(x) \leq 0\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_E h^+ \, d\mu &= \int_{E^+} h^+ \, d\mu \leq \int_{E^+} |h| \, d\mu \leq \int_{E^+} g \, d\mu < \infty \\
\int_E h^- \, d\mu &= \int_{E^-} h^- \, d\mu \leq \int_{E^-} |h| \, d\mu \leq \int_{E^-} g \, d\mu < \infty
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ h integrierbar, und es gilt

$$
\left| \int_E h \, d\mu \right| = \left| \int_{E^+} h^+ \, d\mu - \int_{E^-} h^- \, d\mu \right| \leq \int_{E^+} h^+ \, d\mu + \int_{E^-} h^- \, d\mu \leq \int_E |h| \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu.
$$

□

Satz 49.15 (Beschränkte Konvergenz nach Lebesgue)
Falls $f_n(x) \to f(x)$ μ–f.ü. auf E, alle messbar, und $|f_n(x)| \leq g(x)$ μ–f.ü. auf E mit g auf E integrierbar, dann gilt f integrierbar und

$$
\int_E f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu.
$$

Beweis:

O.B.d.A., nach obige Bemerkung, seien alle Eigenschaften überall in E gesichert. Betrachte die nicht–negativen Funktionen

$$
\begin{aligned}
0 \leq g + f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g + f \geq 0 \\
0 \leq g - f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g - f \geq 0.
\end{aligned}
$$

Nach Lemma von Fatou folgt

$$
\int_E g \, d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_E \pm f_n \, d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_E (g \pm f_n) \, d\mu \overset{\text{Fatou}}{\geq} \int_E (g \pm f) \, d\mu = \int_E g \, d\mu \pm \int_E f \, d\mu
$$

$$
\begin{aligned}
&\cancel{\int_E g \, d\mu} + \liminf \int_E \pm f_n \, d\mu \geq \cancel{\int_E g \, d\mu} \pm \int_E f \, d\mu \\
&\liminf_n \int_E f_n \, d\mu \geq \int_E f \, d\mu \\
&\liminf_n \int_E -f_n \, d\mu = -\limsup_n \int_E f_n \, d\mu \geq -\int_E f \, d\mu \\
&\liminf_n \int_E f_n \, d\mu \geq \int_E f \, d\mu \geq \limsup_n \int_E f_n \, d\mu.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt Gleichheit und damit die behauptete Konvergenz der Integrale. □

Zusammenhang zwischen Lebesgue und Riemann Integrale

Satz 49.16
Sei f beschränkt und Riemann integrierbar auf $[a,b]$. Dann ist f Legbesgue integrierbar auf $[a,b]$ und es gilt

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(x)dx.$$

Beweis:

Sei $\{\Gamma_k\}$ eine Folge von Partitionen von $[a,b]$, mit $\|\Gamma_k\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, O.B.d.A. monoton fallend (Partitionen werden feiner). Sei $k \in \mathbb{N}$, definieren wir zwei einfache Funktionen l_k und u_k wie folgend:
wenn $x_1^k, x_2^k, ...$ die Punkte der Partition k sind, dann definieren wir $l_k(.)$ bzw. $u_k(.)$ auf $[x_i^k, x_{i+1}^k)$ als infimum bzw. supremum von f auf dem Subintervall $[x_i^k, x_{i+1}^k]$, für jedes Subintervall in der Partition k. Dann sind l_k und u_k beschränkt und messbar auf $[a,b)$. Wir haben

$$\int_a^b l_k(x)dx = \int_{[a,b]} l_k d\lambda,$$
$$\int_a^b u_k(x)dx = \int_{[a,b]} u_k d\lambda,$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$, wo links an der Gleichungen Riemann Integrale sind, und rechts Lebesgue Integrale. Es gilt $l_k \leq f \leq u_k$ und da die Partitionen feiner werden, folgt l_k ist monoton wachsend bzw. u_k ist monoton fallend. Sei $l := \lim_{k\to\infty} l_k$, und $u := \lim_{k\to\infty} u_k$. Dann sind l und u messbar und nach beschränkte Konvergenz nach Lebesgue (links) und Riemann Integrierbarkeit (rechts) folgt

$$\int_{[a,b]} l_k d\lambda \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_{[a,b]} l d\lambda, \qquad \int_a^b l_k(x)dx \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_a^b f(x)dx.$$
$$\int_{[a,b]} u_k d\lambda \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_{[a,b]} u d\lambda, \qquad \int_a^b u_k(x)dx \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_a^b f(x)dx.$$

Also
$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} l d\lambda = \int_{[a,b]} u d\lambda.$$

Da $u - l \geq 0$, aus $\int_{[a,b]} (u-l)d\lambda = 0$ folgt $(u-l) = 0$ f.ü. auf $[a,b]$, und aus $l \leq f \leq u$ folgt dann $l = f = u$ f.ü. auf $[a,b]$. Da $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ vollständig, folgt f messbar und es gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} l d\lambda = \int_{[a,b]} u d\lambda = \int_{[a,b]} f d\lambda.$$
□

Satz 49.17
Sei f beschränkt auf $[a,b]$. f ist Riemann integrierbar auf $[a,b]$ genau dann wenn f fast überall stetig auf $[a,b]$ ist.

Beweis:

Sei f beschränkt und Riemann integrierbar auf $[a,b]$. Wir betrachten eine Folge von Partitionen $\{\Gamma_k\}$ wie im Beweis vom Satz 49.16. Sei N eine Nullemnge so dass $l = f = u$ für alle $x \in [a,b] \setminus N$, wie im Beweis vom Satz 49.16.
Wir zeigen: Wenn $x \notin \Gamma_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und $x \notin N$, dann f stetig in x:
Angenommen f nicht stetig in x, dann $\exists\, \varepsilon > 0$, unabhängig von k, so dass $u_k(x) - l_k(x) \geq \varepsilon$. Dann folgt $u(x) - l(x) \geq \varepsilon$. Widerspruch, da $x \notin N$. Also f stetig in x und

$$\lambda\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Gamma_k \cup N\right) = 0,$$

also f fast überall stetig auf $[a,b]$.
Sei jetzt f beschränkt und fast überall stetig auf $[a,b]$, und sei $l_k(.)$ bzw. $u_k(.)$ wie im Beweis vom Satz 49.16. Da f fast überall stetig auf $[a,b]$, folgt $\lim_{k\to\infty} l_k = f = \lim_{k\to\infty} u_k$ f.ü. auf $[a,b]$. Nach beschränkte Konvergenz nach Lebesgue folgt

$$\int_{[a,b]} l_k d\lambda \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_{[a,b]} f d\lambda \xleftarrow[k\to\infty]{} \int_{[a,b]} u_k d\lambda$$

Aber, weil

$$\int_a^b l_k(x)dx = \int_{[a,b]} l_k d\lambda,$$
$$\int_a^b u_k(x)dx = \int_{[a,b]} u_k d\lambda,$$

Es folgt

$$\int_a^b l_k(x)dx \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_{[a,b]} f d\lambda \xleftarrow[k\to\infty]{} \int_a^b u_k(x)dx.$$

Also f Riemann integrierbar. □

§50 Produktmaße und Integration

Ziel: Definition und Auswertung von Maßen und Integralen in $\mathbb{R}^n$ durch wiederholte = geschachtelte Integration in $\mathbb{R}$.

Voraussetzung: im ganzen Kapitel: Zwei σ–endliche Maßräume $(X, \mathcal{A}_\sigma, \mu)$, (Y, B_σ, ν) und deren *Cartesisches Produkt*

$$Z := X \times Y := \{(x,y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Für einfache Teilmengen von Z, sogenannte Rechtecke

$$A \times B \quad \text{mit} \quad A \in \mathcal{A}_\sigma, \quad B \in \mathcal{B}_\sigma,$$

definiere den Produktinhalt $\lambda = \mu \times \nu$:

$$\lambda(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B).$$

Aufgabe: erweitere λ eindeutig von $(\mathcal{A}_\sigma \times \mathcal{B}_\sigma) \subset \mathcal{P}(Z) := \mathcal{P}(X \times Y)$ auf die von $(\mathcal{A}_\sigma \times \mathcal{B}_\sigma)$ in $\mathcal{P}(Z)$ erzeugte σ–Algebra $\mathcal{C}_\sigma$.

Satz 50.1
Die Menge

$$\mathcal{C}_0 := \left\{ \bigcup_{i=1}^{m} (A_i \times B_i) : A_i \in \mathcal{A}_\sigma,\ B_i \in \mathcal{B}_\sigma \text{ für } i = 1 \dots m \right\}$$

bildet eine Algebra, wobei o.B.d.A. Disjunktheit der $(A_i \times B_i)$, *d.h.* $(A_i \times B_i) \cap (A_j \times B_j) = \emptyset$ *falls* $i \neq j$, *angenommen werden kann. Dann ist für* $E = \bigcup_{i=1}^m E_i \in \mathcal{C}_0$ *mit* $E_i := A_i \times B_i$ *durch*

$$\lambda(E) = \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i) \cdot \nu(B_i)$$

ein σ*–endlicher und* σ*–additiver Inhalt definiert.*

Korollar 50.2
Der Inhalt $\lambda := \mu \times \nu$ *lässt sich nach Satz 46.11 und 46.18 eindeutig zu einem Maß* λ *auf die von* $\mathcal{C}_0$ *erzeugte* σ*–Algebra* $\mathcal{C}_\sigma$ *erweitern.* λ *wird als* Produktmaß *bezeichnet.*

Beweis:

Schnittbildung $E = A \times B$, $\tilde{E} = \tilde{A} \times \tilde{B}$

$$E \cap \tilde{E} = \underbrace{(A \cap \tilde{A})}_{\in \mathcal{A}_\sigma} \times \underbrace{(B \cap \tilde{B})}_{\in \mathcal{B}_\sigma} \in \mathcal{C}_0.$$

Entsprechend für endliche Vereinigungen $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$, $\tilde{E} = \bigcup_{j=1}^m \tilde{E}_j$

$$\begin{aligned}
E \cap \tilde{E} &= \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} (E_i \cap \tilde{E}_j) \in \mathcal{C}_0, \text{weiter} \\
E \setminus \tilde{E} &= \left[(B \setminus \tilde{B}) \times (A \setminus \tilde{A})\right] \cup \left[(A \cap \tilde{A}) \times (B \setminus \tilde{B})\right] \cup \left[(B \cap \tilde{B}) \times (A \setminus \tilde{A})\right] \\
E \cup \tilde{E} &= (E \setminus \tilde{E}) \cup \tilde{E} \quad \text{ist disjunkte Zerlegung} \in \mathcal{C}_0, \\
E^c &= Z \setminus E = (X \times Y) \setminus E \in \mathcal{C}_0. \\
&\Longrightarrow \text{Algebraeigenschaften gegeben.}
\end{aligned}$$

Die σ–Endlichkeit folgt allgemein aus der vorausgesetzten σ–Endlichkeit von μ und ν, da

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = X \quad \text{mit} \quad \mu(X_i) < \infty \quad \text{und} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i = Y \quad \text{mit} \quad \nu(Y_i) < \infty,$$

und o.B.d.A. $X_i \subset X_{i+1}$, $Y_i \subset Y_{i+1}$, dann gilt für $Z_i = X_i \times Y_i$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i = Z \quad \text{und} \quad \lambda(Z_i) = \mu(X_i)\nu(Y_i) < \infty.$$

Die σ–Addititvität als Übung. $\square$

Satz 50.3
Falls $E \subset \mathcal{C}_\sigma$, *dann sind die Schnitte (eng. „slice“)*
$E_x := \{z : (x,z) \in E\} \subset Y$ *und* $E_y := \{z : (z,y) \in E\} \subset X$ $\mathcal{B}_\sigma$ *bzw.* $\mathcal{A}_\sigma$ *messbar.*

Beweis:

Sei S die Menge der E für die diese Behauptung wahr ist. Dann ist zu zeigen, dass $\mathcal{C}_0 \subset S$ und S eine σ–Algebra ist. Dann folgt $\mathcal{C}_\sigma \subset S$.

$$
\begin{aligned}
E \in \mathcal{C}_0 \implies E = \bigcup_{i=1}^{m} E_i,\ E_i = A_i \times B_i.& \\
E_x = \Big\{ z \in Y : (x,z) \in E \Big\} &= \Big\{ z \in Y : (x,z) \in E_i \text{ für ein } i \Big\} \\
&= \Big\{ z \in Y : z \in (E_i)_x \text{ für ein } i \Big\} = \bigcup_{i=1}^{m} (E_i)_x, \\
\text{wobei } (E_i)_x &= \Big\{ z : (x,z) \in E_i \Big\} = \Big\{ z : X \in A_i \wedge z \in B_i \Big\} \\
&= \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } x \notin A_i \\ B_i, & \text{falls } x \in A_i. \end{cases} \\
E_x = \bigcup_{i:\, x \in A_i} B_i \in \mathcal{B}_\sigma \quad \text{da} \quad B_i \in \mathcal{B}_\sigma \quad \text{nach Voraussetzung.}&
\end{aligned}
$$

Entsprechend gilt wegen Symmetrie $E_y \subset X$ ist $\mathcal{A}_\sigma$–messbar.

Es wird nun gezeigt, dass für $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ mit $E_i \in S$ auch $E_x \in \mathcal{B}_\sigma$ und $E_y \in \mathcal{A}_\sigma$ und damit $E \in S$. Es gilt

$$
E_x = \Big\{ z \in Y : (x,z) \in E_i \text{ für ein } i \Big\} = \Big\{ z \in Y : z \in (E_i)_x \text{ für ein } i \Big\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Big\{ z \in Y : z \in (E_i)_x \Big\}
$$

$$
= \bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{(E_i)_x}_{\in \mathcal{B}_\sigma \text{ da } E_i \in S} . \implies E_x \in \mathcal{B}_\sigma \quad \text{da dieses System eine } \sigma\text{–Algebra ist.}
$$

Entsprechend gilt $E_y \in \mathcal{A}_\sigma$ und daher $E \in S$.

Es bleibt der Abschluss unter Komplementbildung zu zeigen.

$$
\begin{aligned}
E \in S \implies (Z \setminus E)_x &= \Big\{ z \in Y : (x,z) \in Z \setminus E \Big\} = \Big\{ z \in Y : (x,z) \notin E \Big\} = \Big\{ z \in Y : z \notin E_x \Big\} \\
&= Y \setminus E_x \in B_\sigma.
\end{aligned}
$$

Also gilt $\mathcal{C}_\sigma \subset S$. □

Satz 50.4
Für $E \in \mathcal{C}_\sigma$ gilt

$$
\begin{aligned}
x \to \nu(E_x) &\quad \textit{ist eine } \mathcal{A}_\sigma\textit{–messbare Funktion,} \\
y \to \mu(E_y) &\quad \textit{ist eine } \mathcal{B}_\sigma\textit{–messbare Funktion,}
\end{aligned}
$$

$$
\textit{und es gilt:} \quad \int_X (\nu(E_x))\, d\mu(x) = \int_Y (\mu(E_y)) d\nu(y).
$$

Beweis:

Sei $S \subset \mathcal{C}_\sigma$ die Menge der $E \in \mathcal{C}_\sigma$, für die die Behauptung gilt.
Die erste Aussage ist $\mathcal{C}_0 \subset S$: Betrachte $E \in \mathcal{C}_0$

$$E = \bigcup_{i=1}^{m} \underbrace{A_i \times B_i}_{E_i} \quad \text{disjunkt,}$$

$$E_x = \bigcup_{i=1}^{m} (E_i)_x = \bigcup_{x \in A_i} B_i \quad \text{wie im letzten Beweis,}$$

$$\nu(E_x) = \sum_{x \in A_i} \nu(B_i) = \sum_{i=1}^{m} \chi_{A_i}(x)\nu(B_i),$$

ist eine einfache Funktion und deshalb messbar. Dann $\mathcal{C}_0 \subset S$.
Entsprechend ist $\mu(E_y)$ einfach und messbar mit $\mu(E_y) = \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i)\chi_{B_i}(y)$. Integration ergibt unmittelbar

$$\begin{aligned}\int_X \nu(E_x)\, d\mu &= \sum_{i=1}^{m} \nu(B_i) \int_X \chi_{A_i}(x)\, d\mu(x) = \sum_{i=1}^{m} \nu(B_i)\mu(A_i) \\ &= \int_Y \mu(E_y) d\nu(y).\end{aligned}$$

Wir zeigen jetzt dass S eine σ–Algebra ist. Betrachte $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ mit $E_i \in S$, d.h. erfüllt Behauptung. O.B.d.A. $E_i \subset E_{i+1}$ monoton steigend in $X \times Y$ und daher $(E_i)_x \subset (E_{i+1})_x$ monoton steigend in Y.

$$(E_x) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i)_x \implies \nu(E_x) = \lim_{i \to \infty} \nu((E_i)_x),$$

wegen Stetigkeit von unten des Maßes. Die $\nu((E_i)_x)$ sind eine monoton steigende Folge nichtnegativer, messbarer Funktionen die überall konvergiert, also ist $\nu(E_x)$ messbar. Nach Satz über monotone Konvergenz, es gilt

$$\int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) = \lim_{i \to \infty} \int_X \nu((E_i)_x)\, d\mu(x).$$

Entsprechend gilt symmetrisch

$$\int_Y \mu(E_y) d\nu(y) = \lim_{i \to \infty} \int_Y \mu((E_i)_y) d\nu(y).$$

Beide Grenzwerte sind gleich, da die E_i bereits die Aussage erfüllen, so dass für alle i gilt, dass

$$\int_Y \mu((E_i)_y) d\nu(y) = \int_X \nu((E_i)_x) d\mu(x).$$

Um Abschluss bzgl. Schnitten zu zeigen, betrachte eine abfallende Folge

$$E_1 \supset \ldots \supset E_i \supset E_{i+1} \supset \ldots$$

1. Fall: $E_1 \subset A \times B$ mit $\mu(A) < \infty > \nu(B)$. Wegen Stetigkeit von oben gilt für $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$, dass

$$\nu(E)_x = \lim_{i \to \infty} \nu((E_i)_x) \quad \text{mit} \quad \nu((E_i)_x) < \nu(E_1) < \infty.$$

Also haben die $\nu((E_i)_x)$ die messbare Grenzfunktion $\nu(E_x)$ und es gilt wiederum

$$\int_X \nu(E_x)\, d\mu = \lim_{i \to \infty} \int_X \nu((E_i)_x) d\mu = \lim_{i \to \infty} \int_Y \mu((E_i)_y) d\nu = \int_Y \mu(E_y) d\nu.$$

wie bei der Vereinigung.

2. Fall: $E \not\subset A \times B$ ist in keinem endlichen Rechteck enthalten. Wegen vorausgesetzter σ–Endlichkeit, es gilt

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i, \quad X_i \subset X_{i+1}, \quad Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i, \quad Y_i \subset Y_{i+1},$$

mit $\mu(X_i) < \infty > \nu(Y_i)$ für alle i.

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{(X_i \times Y_i)}_{Z_i} = Z = X \times Y.$$

$E_i = E \cap (X_i \times Y_i)$ erfüllen schließlich Behauptung nach Fall 1. Dann

$$\int_X \nu((E_i)_x)\, d\mu = \int_Y \mu((E_i)_y)\, d\nu,$$
$$\text{und} \quad \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(E_y)\, d\nu(y),$$

da die $\nu((E_i)_x)$ eine monoton steigende Folge nichtnegativer Funktionen bilden, die gegen die deshalb messbare Funktion $\nu(E_x) : X \to [0, \infty]$ konvergieren.

□

Bemerkung: Algebra–Eigenschaften und Abschluss bzgl. abzählbarer Vereinigung und Schnitte ergibt σ–Algebra Eigenschaft. (Monotones System nach Baum)

Korollar 50.5
Unter den Voraussetzungen von Satz 50.4 wird durch

$$\lambda(E) := \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(E_y)\, d\nu(y)$$

ein Maß definiert, dass gerade die Erweiterung des Inhaltes $\lambda = \mu \times \nu$ auf $\mathcal{C}_0$ darstellt. (Wegen σ–Endlichkeit eindeutig.)

Beweis:

Übereinstimmung auf $\mathcal{C}_0$ ergibt wie folgt $A \times B$, $A \in \mathcal{A}_\sigma$, $B \in \mathcal{B}_\sigma$,

$$\begin{aligned}\lambda(A \times B) &= \int_{X\times Y} \chi_{A\times B}\, d\lambda = \int_X \nu\left[(A \times B)_x\right] d\mu(x) = \int_X \chi_A \nu(B)\, d\mu(x) = \nu(B) \int_X \chi_A\, d\mu(x) \\ &= \mu(A)\nu(B) = (\mu \times \nu)(A \times B) \quad \text{wie ursprünglich definiert.}\end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt, dass die neue Definition von λ auch σ–additiv ist. Betrachte $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, mit E_i disjunkt.

$$\lambda(E_i) = \int_X \nu((E_i)_x)\, d\mu(x).$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i) &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_X \underbrace{\nu((E_i)_x)}_{\substack{\text{nichtnegative} \\ \text{messbare Fkt. auf } X}} d\mu(x) \overset{\text{monotone Konvergenz}}{=} \int_X \left(\sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i)_x \right) d\mu(x) \\ &= \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) = \lambda(E),\end{aligned}$$

da $E_x = \bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i)_x$ disjunkte Vereinigung messbarer Mengen. Also ist λ tatsächlich ein Maß, das genau die Erweiterung des ursprünglichen Inhaltes ist. □

Satz 50.6 (Fubini)
$(X, \mathcal{A}_\sigma, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}_\sigma, \nu)$ σ–endlich. $f : X \times Y \to [0, \infty]$ messbar bzgl. C_σ. Dann sind die Funktionen

$$x \mapsto \int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \quad \mathcal{A}_\sigma\text{–messbar,}$$
$$y \mapsto \int_X f(x,y)\, d\mu(x) \quad \mathcal{B}_\sigma\text{–messbar.}$$

Für die Integrale gilt die Identität

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\mu \times \nu) = \int_X \left[\int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\right] d\mu(x) = \int_Y \left[\int_X f(x,y)\, d\mu(x)\right] d\nu(y).$$

Einfache Interpretation: Unter bestimmten Voraussetzungen kommutiert die Integration bzgl. verschiedenen Variablen, ähnlich wie die Differentiation nach Schwarzschen Satz.

Beweis:

Zunächst betrachte $f = \chi_E$ mit $E \subset X \times Y$

$$\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) = \int_Y \chi_E\, d\nu(y) = \int_Y \chi_{E_x}\, d\nu(y) = \nu(E_x) \quad \text{messbar nach Satz 50.4.}$$

Wegen Symmetrie ist $\int_X f(x,y)\, d\mu(y) = \mu(E_y)$ $\mathcal{B}_\sigma$–messbar und

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) & = & \displaystyle\int_Y \mu(E_y)\, d\nu(y) \\ || & & || \\ \displaystyle\int_X \left[\int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\right] d\mu(x) & = & \displaystyle\int_Y \left[\int_X f(x,y)\, d\mu(x)\right] d\nu(y) \end{array}$$

wurde bereits in 50.4 gezeigt.

Behauptung gilt wegen Linearität dann unmittelbar auch für einfache Funktionen, d.h. endliche Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen. Beliebige messbare $f \geq 0$ sind Grenzwerte monoton steigender Folgen einfacher Funktionen

$$f(x,y) = \lim_{i\to\infty} f_i(x,y) \quad \text{mit} \quad f_i(x,y) \leq f_{i+1}(x,y) \quad \text{für alle } i.$$

Dann sind wegen Monotonie des Integrals auch die Funktionenfolgen

$$x \mapsto \int_Y f_i(x,y)\, d\nu(y) \quad \text{und} \quad y \mapsto \int_X f_i(x,y)\, d\mu(x)$$

monoton steigend und es gilt nach monotoner Konvergenz

$$\lim_{i\to\infty} \int_Y f_i(x,y)\, d\nu(y) = \int_X \lim_{i\to\infty} f_i(x,y)\, d\nu(y).$$

□

Da die Aussage für jede einfache Funktion $f_i(x,y)$ gilt

$$\int_X \left[\int_Y f_i(x,y)\, d\nu(y)\right] d\mu(x) = \int_Y \left[\int_X f_i(x,y)\, d\mu(x)\right] d\nu(y),$$

und gilt auch im Grenzwert $i \to \infty$

$$\int_X \left[\int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\right] d\mu(x) = \int_Y \left[\int_X f(x,y)\, d\mu(x)\right] d\nu(x).$$

Bemerkung: Wird beim letzten Satz die Messbarkeit bzgl. $\mathcal{C}_\sigma$ ausgetauscht durch Integrierbarkeit bzgl. $\mu \times \nu$ und Messbarkeit bzgl. $\mathcal{A}_\sigma$ ausgetauscht durch μ–Integrierbarkeit für fast alle x (und $\mathcal{B}_\sigma$ entsprechend), so wird der Beweis wie folgt verallgemeinert:

Nach Vorausgesetzter Integrierbarkeit gilt

$$\int_{X\times Y} f^+(x,y)\, d(\mu\times\nu) < \infty > \int_{X\times Y} f^-(x,y)\, d(\mu\times\nu).$$

Der Satz 50.6 ist auf $f^\pm$ jeweils anwendbar, so dass

$$\int_{X\times Y} f^\pm(x,y)\, d(\mu\times\nu) = \int_X \underbrace{\left[\int_Y f^\pm(x,y)\, d\nu(y)\right]}_{(*)} d\mu(x).$$

$(*)$: nichtnegative Funktion von x mit endlichem Integral bzgl $\mu(x)$. Daher kann sie nur auf einer Menge $A \in \mathcal{A}_\sigma$, mit $\mu(A) = 0$, unendlich sein.

$$\begin{aligned} &\int_Y f^\pm(x,y)\, d\nu(y) \quad \text{endlich für fast alle } x \in X,\\ \text{entsprechend}\quad &\int_X f^\pm(x,y)\, d\mu(x) \quad \text{endlich für fast alle } y \in Y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\mu\times\nu) &= \int_{X\times Y} f^+(x,y)\, d(\mu\times\nu) - \int_{X\times Y} f^-(x,y)\, d(\mu\times\nu)\\ &= \int_X \left[\int_Y f^+(x,y)\, d\nu(x)\right] d\mu(x) - \int_X \left[\int_Y f^-(x,y)\, d\nu(x)\right] d\mu(x)\\ &= \int_X \Bigg[\underbrace{\int_Y f^+(x,y)\, d\nu(y)}_{\text{fast überall endlich}} - \int_Y f^-(x,y)\, d\nu(y)\Bigg] d\mu(x). \end{aligned}$$

Beispiel:

(i) $f(x,y) = xe^{x+y}$ auf $[0,1]^2$, $\mu = \nu = \lambda =$ Lebesgue–Maß,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[\int_0^1 xe^{x+y}\, dx\right] dy &= \int_0^1 \left[xe^{x+y}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{x+y}\, dx\right] dy = \int_0^1 \left[e^{1+y} - 0 - e^{x+y}\Big|_0^1\right] dy\\ &= \int_0^1 e^{1+y}\, dy - \int_0^1 e^{1+y}\, dy + \int_0^1 e^y\, dy = e - 1.\\ \int_0^1 \left[\int_0^1 xe^{x+y}\, dy\right] dx &= \int_0^1 \left[xe^{x+y}\right]_0^1 dx = \int_0^1 \left[xe^{1+x} - xe^x\right] dx\\ &= (e-1)\int_0^1 xe^x\, dx = (e-1)\left[xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\, dx\right]\\ &= (e-1)\,[e - e + 1] = e - 1. \end{aligned}$$

(ii)

$$\int_0^\pi \left[\int_0^1 x\cos(xy)\,dy\right]\,dx = \int_0^1 \left[\sin(xy)\Big|_0^\pi\right]\,dx$$

$$= \int_0^1 (\sin(\pi x))\,dx = -\tfrac{1}{\pi}\cos(\pi x)\Big|_0^1 = \tfrac{1}{\pi}(- \ -1+1) = \tfrac{2}{\pi}.$$

$$\int_0^\pi \left[\int_0^1 x\cos(xy)\,dx\right]\,dy = \int_0^\pi \left[\frac{x}{y}\sin(xy)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{y}\sin(xy)\,dx\right]\,dx$$

$$= \int_0^\pi \left[\frac{\sin(y)}{y} + \frac{\cos(xy)}{y^2}\Big|_0^1\right]\,dy = \int_0^\pi \underbrace{\left[\frac{\sin(y)}{y} + \frac{\cos(y)-1}{y^2}\right]}_{\text{ganze Funktionen}} = \frac{2}{\pi}.$$

(iii) Gegenbeispiel zu Fubini (nach Cauchy):

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\underbrace{\arctan(\tfrac{x}{y})}_{\varphi} \quad \text{auf} \quad X\times Y = (0,1)^2.$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{(1+\frac{x^2}{y^2})y} = \frac{y}{y^2+x^2} \underset{\partial_y}{\longrightarrow} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{1}{(1+\frac{x^2}{y^2})}\left(\frac{-x}{y^2}\right) = \frac{-x}{x^2+y^2} \underset{\partial_x}{\longrightarrow} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\right]\,dy = \int_0^1 \frac{-x}{x^2+y^2}\Big|_0^1 dy = -\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}dy = -\arctan(y)\Big|_0^1 = -\frac{\pi}{4}.$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\right]\,dx = \int_0^1 \frac{y}{x^2+y^2}\Big|_0^1 dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Schlussfolgerung: Voraussetzung verletzt. (Integrierbarkeit ist nicht gegeben). Messbarkeit ist wegen Stetigkeit gegeben.

Motivation: Wir wollen den Satz von Fubini auf Lebesgue–integrierbare Funktionen im $\mathbb{R}^n$ anwenden.

$$X = \mathbb{R}^n, \quad Y = \mathbb{R}^m, \quad X\times Y = \mathbb{R}^{n+m}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{B} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^m), \quad \mathcal{C} = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)).$$

Problem: $\mathcal{C} \neq \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$. Genauer: Es ist bekannt, dass

(i) $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$ (Übung).

(ii) $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$, und genauer

(iii) $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)) \neq \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$.

Beispiel: $E = \{p\}\times B$, $B\subset\mathbb{R}^m$ nicht messbar. E ist Nullmenge in $\mathbb{R}^{n+m}$, aber

$$E \not\subset \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)) \quad \text{denn } E_p \text{ ist nicht messbar.}$$

(iv) $(\lambda_{n+m})_{|_{\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{L}(\mathbb{R}^m))}} = \lambda_n \times \lambda_m$.

(v) $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m))_{\overline{\lambda_n \times \lambda_m}} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$ (Vervollständigung des Produktmaßes). Denn für die σ–Algebren der Borelmengen gilt

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)) &= \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m}) \\
\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) &\subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m}) \\
\implies \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m}) &\subset \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m}) \\
\implies \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m}) &= \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})_{\overline{\lambda_{n+m}}} \subset \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m))_{\overline{\lambda_n \times \lambda_m}} \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m}).
\end{aligned}
$$

Allgemeiner: Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ vollständige Maßräume, $\mathcal{C} = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$, $\lambda = \mu \times \nu$ Produktalgebra und –Maß und $\mathcal{C}_{\overline{\lambda}}$ die Vervollständigung bzgl. λ. Untersuchen nun die Integration von $\mathcal{C}_{\overline{\lambda}}$ –messbaren bzw. –integrierbaren Funktionen.

Korollar 50.7 (aus 50.5)
Sei $E \in \mathcal{C}$. Dann gilt $\lambda(E) = 0$ gdw.

$$
\begin{aligned}
&\mu(E_y) = 0 \quad \textit{für } y \in Y \ \nu\textit{–fast überall} \\
\iff &\nu(E_x) = 0 \quad \textit{für } x \in X \ \mu\textit{–fast überall.}
\end{aligned}
$$

Beweis:

Satz 50.5 und Übung,

„$\Rightarrow$“ $x \mapsto \nu(E_x) \geq 0$, μ–messbar, $A \subset X$ messbar

$$
0 \leq \int_A \nu(E_x)\, d\mu \leq \int_X \nu(E_x) \overset{50.5}{=} \lambda(E) = 0 \overset{\text{Übung}}{\implies} \nu(E_x) = 0 \quad \mu\text{–fast überall}
$$

„$\Leftarrow$“ $\nu(E_x) = 0$ μ–fast überall $\implies$ $\int_x \nu(E_x)\, d\mu = 0$. □

Satz 50.8
$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ vollständige Maßräume. $\mathcal{C}, \lambda, \mathcal{C}_{\overline{\lambda}}$ wie oben.

Wenn $E \in \mathcal{C}$, eine Nullmenge und $F \subset E$ sind, dann gilt

$$
\begin{aligned}
\mu(F_y) = 0 &\quad \nu\textit{–fast überall,} \\
\nu(F_x) = 0 &\quad \mu\textit{–fast überall.}
\end{aligned}
$$

Beweis:

Für die Fasern gilt auch $F_x \subset E_x$.

Nach 50.7 gibt es ein $X_0 \subset X$ messbar mit $\mu(X \setminus X_0) = 0$, so dass $\mu(E_x) = 0\ \forall x \in X_0$.

Nach Definition der Vollständigkeit ist für $x \in X_0$ auch F_x messbar und $\nu(F_x) = 0$.
Für F_y analog. □

Satz 50.9 (vervollständigter Fubini)
$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ vollst. Maßräume, $\mathcal{C} = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$, $\lambda = \mu \times \nu$, $\mathcal{C}_{\overline{\lambda}}$ Vervollst. bzgl. λ, d.h. $(X \times Y, \mathcal{C}_{\overline{\lambda}}, \overline{\lambda})$ ist vollst. Maßraum.

1. *Wenn* $f : X \times Y \to [0,\infty]$ $\mathcal{C}_{\overline{\lambda}}$ *–messbar ist, dann*

   a) $x \mapsto f(x, y_0)$ *ist* $\mathcal{A}$*–messbar* ν*–fast überall* ($y_0 \in Y_0$) *und* $y \mapsto f(x_0, y)$ *ist* $\mathcal{B}$*–messbar* μ*–fast überall* ($x_0 \in X_0$).

   b) $X_0 \ni x_0 \mapsto \int_Y f(x_0, y)\, d\,\nu(y)$ *ist* $\mathcal{A}$*–messbar und* $Y_0 \ni y_0 \mapsto \int_X f(x, y_0)\, d\,\mu(x)$ *ist* $\mathcal{B}$*–messbar.*

   c) $\int_{X\times Y} f(x,y)\, d\lambda(x,y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y).$

2. *Wenn* $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{C}_{\overline{\lambda}}$ *–integrierbar ist, dann*

   a) $x \mapsto f(x, y_0)$, $y \mapsto f(x_0, y)$ *sind fast überall integrierbar.*

   b) $x \mapsto \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)$, $y \mapsto \int_X f(x,y)\, d\mu(x)$ *sind integrierbar.*

   c) $\int_{X\times Y} f(x,y)\, d\lambda = \int_X \int_Y f\, d\nu\, d\mu = \int_Y \int_X f\, d\mu\, d\nu.$

Beweis:

Es genügt, 1. für charakteristische Funktionen χ_H, $H \in \mathcal{C}_{\overline{\lambda}}$, zu zeigen. Die Schlussfolgerung auf einfache und dann messbare nichtnegative Funktionen sowie nachfolgend auf integrierbare Funktionen erfolgt wie in Satz 50.6.

Sei also $H = G \cup F \in \mathcal{C}_{\overline{\lambda}}$ mit $G \in \mathcal{C}$, F eine Nullmenge, d.h. $F \subset E \in \mathcal{C}$ mit $\lambda(E) = 0$. Betrachten $f = \chi_H$. Für die vertikalen Schnitte gilt

$$H_x = G_x \cup F_x, \quad G_x \in \mathcal{B}, \quad F_x \subset E_x \in \mathcal{B}.$$

Nach 50.8 gibt es ein $X_0 \subset X$, $\mu(X \setminus X_0) = 0$ mit

$$\begin{aligned} &\nu(E_x) = 0 \quad \forall x \in X_0 \implies F_x \in \mathcal{B} \quad \text{und} \quad \nu(F_x) = 0 \\ &\implies H_x \in \mathcal{B}^{(1)}, \quad \nu(H_x) \le \nu(G_x) + \underbrace{\nu(F_x)}_{=0} = \nu(G_x) \le \nu(H_x). \\ &\implies \nu(H_x) = \nu(G_x) \quad \mu\text{–fast überall, und folgt} \end{aligned}$$

$$\int_Y \chi_H(x,y)\, d\nu(y) = \nu(H_x) = \nu(G_x) = \int_Y \chi_G(x,y)\, d\nu(y)^{(2)}$$

$^{(1)}$: $y \mapsto \chi_H(x_0, y)$ ist $\mathcal{B}$–messbar μ–fast überall, $^{(2)}$: $x \mapsto \int \chi_H(x,\cdot)\, d\nu$ ist $\mathcal{A}$–messbar.

Analog für die horizontalen Schnitte, und zusammen

$$\begin{aligned} \int_{X\times Y} \chi_H\, d\overline{\lambda} &= \overline{\lambda}(H) = \lambda(G) = (\mu \times \nu)(G) \\ &\overset{50.5}{=} \int_X \left(\int_Y \chi_G\, d\nu \right) d\mu = \int_X \int_Y \chi_H\, d\nu\, d\mu \\ &= \int_Y \int_X \chi_G\, d\mu\, d\nu = \int_Y \int_X \chi_H\, d\mu\, d\nu. \end{aligned}$$

□

Korollar 50.10 (Fubini für Lebesgue–integrierbare Fkt.)
Seien $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ Lebesgue–messbare Mengen nd $f : A \times B \to \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue–integrierbar bzw. nicht negativ und messbar. Dann gilt

$$\int_{A\times B} f\,d\lambda_{n+m} = \int_A \left(\int_B f\,d\lambda_m\right) d\lambda_n = \int_B \left(\int_A f\,d\lambda_n\right) d\lambda_m.$$

Ist $f = g \cdot h$ mit messbaren Funktionen $g : A \to \overline{\mathbb{R}}$, $h : B \to \overline{\mathbb{R}}$, dann ist

$$\int_{A\times B} f\,d\lambda_{n+m} = \left(\int_A g\,d\lambda_n\right)\left(\int_B h\,d\lambda_m\right).$$

Korollar 50.11
$E \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}$–messbar, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{L}$–integrierbar

$$\begin{aligned}\int_E f\,d\lambda_n &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E \cdot f\,d\lambda_n \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\chi_E \cdot f)(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)\,d\lambda_{n-1}(x_1,\dots\hat{x}_i,\dots x_n)\right) dx_i \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{E_{x_i}} f\,d\lambda_{n-1}\right) dx_i.\end{aligned}$$

Korollar 50.12 (Prinzip von Cavalieri)
Für $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\lambda_n(E) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}(E_x)\,d\lambda_1(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \lambda_1(E_y)\,d\lambda_{n-1}(y).$$

Beispiel:

(i) Sei $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $f : E \to [0,\infty]$ $\mathcal{L}$–messbar. Betrachte das Volumen

$$V_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \middle| x \in E, y \in [0, f(x)]\right\}$$

unter dem Graphen von f. Dann gilt

$$\lambda_{n+1}(V_f) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_1(V_{f_x})\,d\lambda_n(x) = \int_E f(x)\,d\lambda_n(x),$$

denn

$$V_{f_x} = \{y \in \mathbb{R} | \, 0 \le y \le f(x)\} = \begin{cases} \emptyset & \text{,falls } x \notin E \\ [0, f(x)] & \text{,sonst.} \end{cases}$$

(ii) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ $\mathcal{L}$–integrierbar. Betrachten den Rotationskörper K des Graphen von f um die x–Achse. Dann gilt

$$\lambda_3(K) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_2(K_x)\,d\lambda_1(x) = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx, \quad \text{denn}$$

$$K_x = \begin{cases} \emptyset & \text{,falls } x \notin [a,b] \\ \text{Kreisscheibe mit Radius } f(x) & \text{,sonst.} \end{cases}$$

§51 Transformationsformel für Lebesgue–Integral

Wir wollen die *Transformationsformel* für das Riemann–Integral

$$\int_{\varphi(I)} f(t)\,dt = \int_I f(\underbrace{\varphi(x)}_{t})|\varphi'(x)|\,dx,$$

mit $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \varphi(I) \subset \mathbb{R}$ ein $\mathcal{C}^1$–Diffeomorphismus sowie $f : \varphi(I) \to \mathbb{R}$ stetig, auf das mehrdimensionale Lebesgue–Integral verallgemeinern.

Satz 51.1
Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : U \to V = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ ein $\mathcal{C}^1$–Diffeomorphismus. Dann gilt

(i) $\forall\, A \in \mathcal{L}(U) :\ \varphi(A)$ *ist $\mathcal{L}$–messbar und*

(ii) $(*) \quad \lambda_n(\varphi(A)) = \int_A |\det \nabla\varphi|\,d\lambda_n.$

Korollar 51.2 (Transformationsformel)
Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : U \to V = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ ein $\mathcal{C}^1$–Diffeomorphismus. Dann gilt für alle $A \in \mathcal{L}(U)$ und $f : \varphi(A) \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{L}$–messbar

$$(**) \quad f \circ \varphi \quad \text{ist } \mathcal{L}\text{–messbar und} \quad \int_{\varphi(A)} f\,d\lambda_n = \int_A (f\circ\varphi)\cdot|\det\nabla\varphi|\,d\lambda_n$$

Insbesondere ist f über $\varphi(A)$ $\mathcal{L}$–integrierbar gdw. $(f\circ\varphi)\,|\det\nabla\varphi|$ über A $\mathcal{L}$–messbar ist.

Beweis:

Folgt aus Lemma 51.3.

Bemerkung: $(*)$ und $(**)$ sind äquivalent.

Beweis: (von Satz 51.1)

(i) Messbarkeit von $\varphi(A)$ folgt aus 47.5.

(ii) (a) Brauchen nur zu zeigen, dass $\forall p \in U\ \exists\, W \subset U$ offen, so dass $\varphi_{|W}$ $(*)$ erfüllt. Denn linke und rechte Seite von $(*)$ sind σ–additiv und jedes $A \in \mathcal{L}(U)$ kann man in eine abzählbare, disjunkte Vereinigung von Teilmengen A_i solcher W_i zerlegen.

(b) Brauchen für $n \geq 2$ die lokale Eigenschaft nur für solche φ zu zeigen, für die

$$\varphi(\underbrace{x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n}_{x}) = \big(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_{i-1}(x),x_i,\varphi_{i+1}(x),\ldots,\varphi_n(x)\big)$$

für mindestens ein $i \in \{1,\ldots,n\}$ gilt. Denn:

a) Sind $U_1 \underset{\varphi_1}{\longrightarrow} U_2 \underset{\varphi_2}{\longrightarrow} U_3$ $\mathcal{C}^1$– Diffeomorphismus die $(*)$ erfüllen, dann erfüllt auch $\varphi_2\circ\varphi_1$ $(*)$.

$$\lambda_n(\varphi_2(\varphi_1(U_1))) \overset{\varphi_2,(*)}{=} \int_{\varphi_1(U_1)} |\det\nabla\varphi_2|\,d\lambda_n \overset{\varphi_2,(**)}{=} \int_{U_1} \underbrace{|\det\nabla\varphi_2|\circ\varphi_1|\det\nabla\varphi_n|}_{|\det\nabla(\varphi_2\circ\varphi_1)|}\,d\lambda_n.$$

b) Sei T_{ij} die Vertauschung der i–ten und j–ten Koordinate. Gilt für $T_{ij} \circ \varphi \circ T_{kl}$ $(*)$, dann gilt $(*)$ auch für φ. Aus der Linearität von T_{ij} folgt

$$\lambda_n \left(T_{ij}(\varphi(T_{kl}(U'))) \right) = |\det T_{ij}| \lambda_n \left(\varphi(T_{kl}(U')) \right),$$

und $(*)$ für T_{ij}, sowie

$$\lambda_n \left(T_{ij}(\varphi(T_{kl}(U'))) \right) = \int_{U'} \left| \det \nabla (T_{ij} \circ \varphi \circ T_{kl}) \right| \, d\lambda_n$$

$$\iff \lambda_n(\varphi(\underbrace{T_{kl}(U')}_{U})) = \int_{U'} |\det \nabla \varphi| \circ T_{kl} \circ |\det T_{kl}| \, d\lambda_n \overset{T_{kl},(**)}{=} \int_U |\det \nabla \varphi| \, d\lambda_n.$$

c) Sei $\varphi : U \to \varphi(U)$ ein $\mathcal{C}^1$–Diffeomorphismus und $p \in U$ fix. Aus $|\det \nabla \varphi(p)| \neq 0$ kann man durch Vertauschen der Koordinaten im Bild– und Definitionsbereich $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(p) \neq 0$ erlangen. Setzen $\psi(x) = (\varphi_1(x), x_2, \ldots, x_n)$, dann ist $\det \nabla \psi = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \neq 0$ und existiert *lokal* eine Umkehrung ψ^{-1}. Für $p(y) = \varphi \circ \psi^{-1}$ und $y = \psi(x)$ folgt

$$p(y) = \big(y_1, p_2(y), \ldots, p_n(y)\big).$$

Daraus folgt, dass man (Modulo Vertauschung) für $n \geq 2$ jeden $\mathcal{C}^1$– Diffeomorphismus lokal als Komposition zweier $\mathcal{C}^1$–Diffeomorphismen schreiben, die mindestens eine Koordinate fest lassen.

(c) Eigentlicher Beweis durch Induktion über n

IA: $n = 1$ Betrachten die Maße $\mu_1(A) = \lambda_1(\varphi(A))$ und $\mu_2(A) = \int_A |\varphi'| \, d\lambda_1$ auf $\mathcal{L}(U)$.
Für $A = [a, b]$ folgt dies aus der Transformationsformel für das Riemann–Integral.
Wegen $[a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a, b - \frac{1}{n}]$ und der Unterhalbstetigkeit für M aße gilt die Gleichheit von μ_1 und μ_2 auf dem Ring der halboffenen Intervalle.
Weil μ_1 und μ_2 σ–endlich sind, folgt die Gleichheit auf $\mathcal{L}(U)$ aus der Eindeutigkeit der Fortsetzung.

IV: $(*)$ gilt für alle $\mathcal{C}^1$–Diff. in Dimension $n - 1 \in \mathbb{N}$.

IB: Sei $U \ni (t, x) \overset{\varphi}{\mapsto} (t, \varphi_t(x)) \in \mathbb{R}^n$ mit $\varphi_t : U_t = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} | (t, x) \in U\} \to \mathbb{R}^{n-1}$.

$$\implies |\det \nabla \varphi|(t, x) = |\det \nabla \varphi_t|(x) \quad \text{und} \quad \varphi(A)_t = \varphi_t(A_t) \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_n(\varphi(A)) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}(\varphi(A)_t) \, dt = \int_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}(\varphi_t(A_t)) \, dt \\
&\overset{IV}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{A_t} |\det \nabla \varphi_t|(x) \, d\lambda_{n-1}(x) \, dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \underbrace{\chi_{A_t}(x)}_{\chi_A(t,x)} |\det \nabla \varphi|(t, x) d\lambda_{n-1} \, dt \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_A |\det \nabla \varphi| \, d\lambda_n.
\end{aligned}$$

$\square$

Beispiel:

Sei $K_R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2 \leq R\}$ die Vollkugel mit Radius R und

$$(x,y,z) = \psi(\alpha,\beta,r) = (r\cos(\alpha), r\cos(\alpha)\sin(\beta), r\sin(\alpha)).$$

Dann ist $\psi : U = (0,2\pi) \times (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \times (0,R) \to \psi(U) \subset \mathbb{R}^3$ ein $\mathcal{C}^1$–Diffeomorphismus, mit $|\det \nabla\psi| = r^2\cos(\beta)$ und $\lambda_3(K_R) = \lambda_3(\psi(U))$.

$$\overset{51.1}{\Longrightarrow} \lambda_3(K_R) = \lambda_3(\psi(U)) = \int_U r^2\cos(\beta)\,d\lambda_3 = \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^R r^2\cos(\beta)\,dr\,d\beta\,d\alpha = \frac{4}{\pi}R^3.$$

Lemma 51.3
Sei $\varphi : U : \mathbb{R}^n \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus. Dann gilt $(**) \iff (*)$.

Beweis:

Siehe Übungsaufgabe.

Satz 51.4 (Satz von Sard)
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F : D \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, und $C = \{x \in D : \, det(F'(x)) = 0\}$. Dann ist $\lambda_n(F(C)) = 0$.

Beweis: C ist abgeschlossen, also C ist abzählbare Vereinigung kompakter Mengen K_i in D. Da F stetig, $F(C) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F(K_i)$ mit $F(K_i)$ kompakt, also $F(C)$ Borel messbar.
Sei jetzt W ein Würfel mit $\overline{W} \subset D$. Wir zeigen $\lambda_n(F(C\cap W)) = 0$:
Aus dem Mittelwertsatz folgt dass es für jede $x,a \in W$ und $j \in \{1,...,n\}$ ein $\gamma_j \in (0,1)$ gibt, so dass

$$F_j(x) = F_j(a) + (F_j'(a+\gamma_j(x-a)))(x-a).$$

Sei $\varepsilon > 0$, dann folgt auch aus der stetigkeit von F', dass ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$\|F'(x) - F'(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } x,a \in W \text{ mit } \|x-a\| < \delta.$$

Sei $G := \sup_{x\in W}\|F'(x)\|$. Sei $W = \bigcup_{1\leq i\leq p} W_i$, mit W_i disjunkte TeilWürfel mit gleichen Kantenlänge $= \delta n^{-\frac{1}{2}}$.
Sei $W_i \cap C \neq \emptyset$, $a \in W_i \cap C$, dann ist Rang von $F'(a) < n$. O.B.d.A., weil λ_n bewegungsinvariant, sei $F(a) = 0$ und $F'(a)(\mathbb{R}^n) \subset \text{Span}(e_1,...,e_{n-1})$, also $F_n'(a) = 0$. Dann ist für alle $x \in W$, $j \in \{1,...,n-1\}$

$$|F_j(x)| \leq \|F'(a+\gamma_j(x-a))(x-a)\| \leq G\delta.$$

Da $F_n'(a) = 0$, folgt für jedes $x \in W_i$

$$\begin{aligned}|F_n(x)| &= |(F_n'(a+\gamma_n(x-a)) - F_n'(a))(x-a)| \\ &\leq \|(F'(a+\gamma_n(x-a)) - F'(a))(x-a)\| \leq \varepsilon\delta,\end{aligned}$$

un damit $F(W_j) \subset [-G\delta, G\delta]^{n-1} \times [-\varepsilon\delta, \varepsilon\delta]$.
Dann ist $\lambda_n(F(C\cap W)) \leq \sum_{1\leq i\leq p} \lambda_n(F(C\cap W_i)) \leq 2^n G^{n-1} n^{\frac{n}{2}} \lambda_n(W)\varepsilon$.
Da ε beliebig klein sein darf, folgt $\lambda_n(F(C\cap W)) = 0$.
Da $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $D = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \hat{W}_k$ abzählbare Vereinigung (abgeschlossene) Würfel $\hat{W}_k$.
Also $F(C) = F(C\cap D) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F(C\cap\hat{W}_k)$. Dann ist $\lambda_n(F(C)) = 0$. □