Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. PhD. Andreas Griewank; Dipl.Math. Torsten Bosse

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis 3 (WS 2011/2012)
Serie 1

Abgabe bis 26.10.2011, 17 Uhr

Aufgabe 1.1: (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass für $A_1, \dots, A_n \subset X$ gilt

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcap_{j=1}^{n} A_j \cup \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \triangle A_{k+1}.$$

Hierbei bezeichne $\triangle$ die symmetrische Differenz $A \triangle B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

Aufgabe 1.2: (5 Punkte)

Seien $A_1, \dots, A_n \subset X$ und gelte desweiteren

$$U_k := \bigcup_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}, V_k := \bigcap_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_k}.$$

Zeigen Sie, dass für $k = 1, \dots, n$ gilt:

$$U_k = V_{n-k+1}.$$

Aufgabe 1.3: (2+3 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. Seien $\mathcal{S}_1$ und $\mathcal{S}_2$ zwei σ-Algebren über X, dann ist der Durchschnitt $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ wieder eine σ-Algebra über X.

2. Allgemeiner gilt: Sei $\mathcal{S}_i, i \in \mathcal{I}$ eine (endliche bzw. unendliche) Menge von σ-Algebren über X, so ist der (endliche bzw. unendliche) Schnitt

   $$\mathcal{S} \equiv \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{S}_i$$

   wieder eine σ-Algebra über X.

Aufgabe 1.4: (2+3 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Sei $\{\mathcal{A}_n\}_{n \geq 1}$ eine wachsende Folge von Algebren über X, so ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ eine Algebra.

2. Sei $\{\mathcal{S}_n\}_{n \geq 1}$ eine streng monoton wachsende Folge von σ-Algebren über X, so ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$ keine σ-Algebra. (Hinweis: Finden Sie ein Gegenbeispiel)