Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Andreas Griewank PhD.; Dipl.Math. Torsten Bosse

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis 3 (WS 2011/2012)
Serie 10

Abgabe bis 13.01.2012 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 10.1: (4 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Mengen

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \|x\|_2^2 = y^2\},\\
M_2 &= \{(x,y) \in M_1 \mid y > 0\},\\
M_3 &= M_1 \backslash \{(0,\ldots,0,0)\} \text{ und}\\
M_4 &= \{(x_1,y_1),\ldots,(x_k,y_k)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.
\end{aligned}
$$

Begründen Sie, welche der Mengen eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$ darstellt.

Aufgabe 10.2: (5 Punkte)

Betrachten Sie die Menge aller Niveaumengen $N_c(f) := \{x \in \mathbb{R}^2 | f(x) = c\}$, $c \in \mathbb{R}$ für die gegebene Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) = -x_1^3 + x_1^2 + x_2^2.$$

Bestimmen Sie alle Niveaumengen, welche eine C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ bilden, und geben Sie die Dimension der Untermannigfaltigkeit an.

Aufgabe 10.3: (6 Punkte)

i) Beweisen Sie die folgende Aussage: Seien M bzw. N eine m- bzw. n-dimensionale $\mathcal{C}^s$-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^k$ bzw. des $\mathbb{R}^l$, dann ist $M \times N$ eine $(m+n)$-dimensionale $\mathcal{C}^s$-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{k+l}$.

ii) Betrachten Sie nun die m- bzw. n-dimensionalen $\mathcal{C}^s$-Untermannigfaltigkeiten M bzw. N des $\mathbb{R}^k$. Zeigen Sie durch Beispiele, dass im Allgemeinen weder ihr Schnitt noch ihre Vereinigung eine $\mathcal{C}^s$-Untermannigfaltigkeit sein muss. Geben Sie geeignete hinreichende Bedingungen an M und N für die Mannigfaltigkeitseigenschaft des Schnittes oder der Vereinigung an.

Aufgabe 10.4: (5 Punkte)

Sei M eine m-dimensionale $\mathcal{C}^s$-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, dass das Bild $\Gamma(M)$ von M unter einem Diffeomorphismus $\Gamma \in \mathrm{Diff}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ wieder eine m-dimensionale $\mathcal{C}^s$-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist.