Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Andreas Griewank PhD.; Dipl.Math. Torsten Bosse

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis 3 (WS 2011/2012) Serie 11

Abgabe bis 24.01.2012 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 11.1: (5 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt von $\partial Z_3 \cap Z_1 \cap Z_2$ in $\mathbb{R}^3_{\geq 0} := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$, wobei $Z_1 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 |\ x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$, $Z_2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 |\ x_1^2 + x_3^2 \leq 1\}$ und ∂Z_3 die Oberfläche des Zylinder $Z_3 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 |\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ ist.

Aufgabe 11.2: (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass für $0 < r < a \in \mathbb{R}$ die 2-dimensionale $\mathcal{C}^\infty-$Mannigfaltigkeit

$$M_{a,r} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\sqrt{x^2 + y^2} - a \right)^2 + z^2 = r^2 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

ein Atlas mit 3 Karten besitzt. Berechnen Sie die Oberfläche von $M_{2,1}$.

Aufgabe 11.3: (5 Punkte)

Man berechne die Länge folgender Wege:

a) $[0, \pi] \to \mathbb{R}^2, t \to (\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t)$,

b) $[1, \infty) \to \mathbb{R}^2, t \to t^{-2}(\cos t, \sin t)$ und

c) $[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2, t \to (t^3, 3t^2/2)$ mit $-\infty < \alpha < \beta < \infty$.

Aufgabe 11.4: (5 Punkte)

Gegebene sei eine stetig differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}_{>0}$, welche über einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ I strikt positiv ist. Zeigen Sie, dass die Rotationsfläche M des Graphen von f

$$M = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3 \in I, x_1^2 + x_2^2 = f^2(x_3) \right\}$$

eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist und dass für ihren Flächeninhalt $vol_2(M)$ gilt:

$$vol_2(M) = 2\pi \int_I f(t) \sqrt{1 + f'(t)^2} dt.$$

Bestimmen Sie $vol(M)$ für $f(x_3) = \frac{1}{3} x_3^3$ über dem Intervall $I = (1, 2) \subset \mathbb{R}$.