Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Andreas Griewank PhD.; Dipl.Math. Torsten Bosse

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis 3 (WS 2011/2012) Serie 12

Abgabe bis 31.01.2012 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 12.1: (5 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussage:

Eine Menge M ist eine n-Nullmenge in $\mathbb{R}^n$ gdw. M ist eine Lebesguesche Nullmenge in $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 12.2: (5 Punkte)

Bezeichne M bzw. N eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$, und $\{(\gamma_a, U_a) \mid a \in A)\}$ bzw. $\{(\tilde{\gamma}_b, U_b) \mid b \in B)\}$ sei ein Atlas von M bzw. N. Zeigen Sie, dass

$$\{((\gamma_a \times \tilde{\gamma}_b), U_a \times U_b) \mid (a, b) \in A \times B)\}$$

mit $(\gamma_a \times \tilde{\gamma}_b)(u, v) = (\gamma_a(u), \tilde{\gamma}_b(v))$ ein Atlas von $M \times N$ ist.

Aufgabe 12.3: (5 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall $I = (1, \infty)$ durch

$$f(x_3) = \frac{1}{x_3^\alpha \log^\beta x_3} \quad \text{mit } \alpha, \beta > 0.$$

Bestimmen Sie alle Parameter α und β, so dass

i) sowohl die Rotationsfläche

$$RF_{\alpha,\beta}(f) = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3 \in I, x_1^2 + x_2^2 = f^2(x_3)\right\}$$

als auch das Volumen des Rotationskörpers

$$RK_{\alpha,\beta}(f) = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3 \in I, x_1^2 + x_2^2 \leq f^2(x_3)\right\}$$

endlich ist.

ii) die Rotationsfläche $RF_{\alpha,\beta}(f)$ unendlich, aber das Volumen des Rotationskörpers $RK_{\alpha,\beta}(f)$ endlich ist.

Aufgabe 12.4: (5 Punkte)

Betrachten Sie die 1-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

$$G_i = \{f_i(t) : t \in [0,1) \subset \mathbb{R}\},\ i = 1,2 \text{ mit } f_1(0) = f_2(0)$$

und $f_i \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ ist k_i-mal stetig differenzierbar, so dass nicht alle Ableitungen $f_i^{(j_i)}(0)$ für $0 \leq j_i \leq k_i$ verschwinden. Dabei gelte weiterhin für die ersten nicht verschwindenden Ableitungen $f_i^{(j_i^*)}(0)$, dass $\alpha f_1^{(j_1^*)}(0) + \beta f_2^{(j_2^*)}(0) = 0$ mit $\alpha, \beta > 0$.

i) Beweisen Sie, dass der Schnitt M von $G_1 \cup G_2$ mit einer hinreichend kleinen offenen Umgebung von $f_i(0)$ eine C^1-Mannigfaltigkeit ist, wenn die ersten nicht verschwindenden Ableitungen parallel sind.

ii) Beweisen Sie zumindest für den Fall $k_i = 1$, dass die Parallelitätsbedingung auch notwendig ist, damit eine solche Menge[1] M eine Mannigfaltigkeit sein kann.

iii) Geben Sie beweisbare Gegenbeispiele an, bei welchen die Funktionen f_i Polynome sind, aber jedes M dieser Art[1] keine C^2-Mannigfaltigkeit ist.

[1] siehe erste Teilaufgabe 12.4.i)