Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Andreas Griewank PhD.; Dipl.Math. Torsten Bosse

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis 3 (WS 2011/2012)
Serie 13

Abgabe bis 07.02.2012 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 13.1: (5 Punkte)

Sei D eine beliebige offene Teilmenge in $\mathbb{R}^3$. Für vektorwertige Funktionen $F = (F1, F2, F3) \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^3)$ sind die Differentialoperatoren rot und div wie folgt definiert

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} e_1 & \partial_1 & F_1 \\ e_2 & \partial_2 & F_2 \\ e_2 & \partial_3 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2}F_3 - \frac{\partial}{\partial x_3}F_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3}F_1 - \frac{\partial}{\partial x_1}F_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1}F_2 - \frac{\partial}{\partial x_2}F_1 \end{pmatrix} \text{ und div } F = \text{spur}(\nabla F) = \frac{\partial}{\partial x_1}F_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}F_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}F_3.$$

Zeigen Sie, dass für beliebige $a \in \mathbb{R}^3$, $f \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R})$ und $F \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R}^3)$ gilt

(a) $\text{div}(a \times F) = - < a, \text{rot } F >$,

(b) $\text{rot}(af) = -a \times \text{grad } f$,

(c) $\text{rot grad } f \equiv 0$ und

(d) $\text{div rot } F \equiv 0$.

Aufgabe 13.2: (5 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden *Anulusmengen* in $\mathbb{R}^2$

$$A_{s,t} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | : \ t \leq x^2 + y^2 \leq s\} \subset \mathbb{R}^2 \text{ mit } 0 < t < s.$$

Bestimmen Sie für zwei gegebene Anulusmengen $A^i_{s_i,t_i} (i = 1, 2)$ zwei Karten $\gamma_i : A^i_{s_i,t_i} \to M_{a,r}$, welche einen Atlas für den Torus $M_{a,r} \subset \mathbb{R}^3$ aus Aufgabe 11.2 bilden und finden Sie eine Normale mit Hilfe dieser Parametrisierungen.

Aufgabe 13.3: (5 Punkte)

Nach dem *Satze von Poincaré-Brouwer*[1] gibt es auf der Sphäre

$$S^2 \subset \mathbb{R}^3 := \{(x_1, x_2, x_3) \subset \mathbb{R}^3 : \ \|x_1, x_2, x_3\|_2 = 1\}$$

kein Vektorfeld $f : S^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $(x_1, x_2, x_3)^\top f(x_1, x_2, x_3) = 0$ ohne Nullstelle $f(x_1, x_2, x_3) = 0$. Führen Sie die Annahme, dass S^2 als Kartengebiet $S^2 = \gamma(\Omega)$ einer einzelnen Karte $\gamma : \Omega \to S^2$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen dargestellt werden kann, zu einem Widerspruch.

Aufgabe 13.4: (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Cantormenge eine 0.8-Nullmengen und die Kochkurve eine 1.5-Nullmenge ist. Die Kochkurve ist dabei eine iterativ definierte Fraktalkurve. Ausgehend von einem Basisintervall wird in jeder Iterationsstufe i, der zugrundeliegende Teilabschnitt in 3 gleich große

[1] auch *Satz vom Igel* genannt

Abschnitte der Länge l_i unterteilt und der jeweils mittlere Abschnitt durch zwei Abschnitte der Länge l_i ersetzt, so dass die folgende Struktur entsteht:

Abschnitt - 60°-Winkel - Abschnitt - 120°-Winkel (Gegenrichtung) - Abschnitt - 60°-Winkel - Abschnitt: