Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. PhD. Andreas Griewank; Dipl.Math. Torsten Bosse

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis 3 (WS 2011/2012) Serie 2

Abgabe bis 2.11.2011

Aufgabe 2.1: (1+2+2 Punkte)

Geben Sie über den entsprechenden Grundmengen X die erzeugten σ-Algebren $\sigma(M_i)$ der folgenden Mengen an:

$$M_1 = \{\{1\}, \{2\}\} \text{ über } X = \{1,2,3,4\},$$
$$M_2 = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{4,5\}\} \text{ über } X = \{1,2,3,4,5\} \text{ und}$$
$$M_3 = \{\{1\}, \{2,3,4\}, \{4,5,6\}\} \text{ über } X = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

Aufgabe 2.2: (1+1+2+1 Punkte)

Zeigen Sie, dass jedes der folgenden Systeme ein Erzeuger der borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}^n$ ist:

$$\mathcal{O}^n := \{U \subset \mathbb{R}^n : U \text{ offen}\},$$
$$\mathcal{C}^n := \{A \subset \mathbb{R}^n : A \text{ abgeschlossen}\},$$
$$\mathcal{I}^n := \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}^n, a \leq b\} \text{ und}$$
$$\mathcal{I}^n_\infty := \{(-\infty, c] : c \in \mathbb{R}^n \text{ und } \infty = (\infty, \ldots, \infty) \in \mathbb{R}^n\}.$$

Hinweis: Für $a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ ist dabei $a \leq b$ komponentenweise zu verstehen, dh., $a_i \leq b_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 2.3: (5 Punkte)

Betrachten Sie die halboffenen Quader

$$Q := [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_n, b_n) \subset \mathbb{R}^n.$$

Beweisen Sie,

1. dass die folgenden Figuren einen Ring bilden:
$$A := \bigcup_{i=1}^m Q_i, \; Q_i \text{ disjunkte Quader } Q_i.$$
2. dass der Inhalt (siehe Vorlesung)
$$\tilde{\lambda}_n(A) = \sum_{i=1}^m \lambda_n(Q_i) \in [0, \infty), \text{ wobei } \lambda_n(Q) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i),$$
für die Figuren A ein σ-endlicher σ-Inhalt ist.

Aufgabe 2.4: (5 Punkte)

Zeigen Sie für $X = [0,1] \subset \mathbb{R}$, dass kein Maß μ auf $\mathcal{P}(X)$ mit $\mu(X) = 1$ existiert, welches nur die Werte 0 und 1 annimmt und auf allen endlichen Teilmengen von X verschwindet.