HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. ANDREAS GRIEWANK PHD.; DIPL.MATH. TORSTEN BOSSE

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis 3 (WS 2011/2012)
Serie 3

Abgabe bis 8.11.2011

Aufgabe 3.1: (4 Punkte)

Beweisen, bzw. widerlegen Sie die folgende Aussage: Die Dirichlet Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 1 \text{ falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

ist messbar, aber nicht stetig.

Aufgabe 3.2: (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass jede monotone Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar ist.

Aufgabe 3.3: (2+2 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Mengenfunktionen $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ Maße sind:

1. $\mu[A] := |A|$ und
2. $\mu[A] := |A \cap S|$, für fixiertes, abzählbares $S \in \mathcal{P}(X)$.

Aufgabe 3.4: (4 Punkte)

Sei $\mathcal{S}$ durchschnittsstabil, $S \in \mathcal{S}$ und $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ ein Maß. Folgern Sie, dass die Mengenfunktion

$$\mu_S[A] := \mu[A \cap S],\ \mu_S : \mathcal{S} \to [0, \infty]$$

ein Maß.

Aufgabe 3.5: (4 Punkte)

Sei $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Maßen $\mu_n : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ und $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^+$. Beweisen Sie, dass die Mengenfunktion

$$\mu[A] := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu_n[A],\ \mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$$

wieder ein Maß ist.