Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Andreas Griewank PhD.; Dipl.Math. Torsten Bosse

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis 3 (WS 2011/2012) Serie 4

Abgabe bis 15.11.2011

Aufgabe 4.1: (2 Punkte)

Betrachten Sie die Indikatorfunktion $\chi : \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}$ mit

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

Verifizieren Sie, dass die folgenden Gleichheiten gelten:

$$\begin{aligned} \chi_{A\cap B} &= \chi_A \chi_B, \\ \chi_{A\cup B} &= \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B, \\ \chi_{A\setminus B} &= \chi_A - \chi_A\chi_B, \\ \chi_{A\triangle B} &= |\chi_A - \chi_B|. \end{aligned}$$

Aufgabe 4.2: (2 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Mengen[1]

$$U_k \equiv \left\{ y \in Y : d(y, U^c) > \frac{1}{k} \right\}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ offen sind.

Aufgabe 4.3: (4 Punkte)

Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und $0 < \alpha < \lambda_n(A) < \beta$. Beweisen Sie, dass eine kompakte Menge $K \subset A$ mit $\alpha = \lambda_n(K)$ und eine offene Menge $U \supset A$ mit $\beta = \lambda_n(U)$ existieren.

Aufgabe 4.4: (4 Punkte)

Sei $(X, \mathcal{B})$ ein Messraum mit der borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}$. Zeigen Sie für die Vektorfunktion $f := (f_1, \ldots, f_n) : X \to \mathbb{R}^n$, dass falls f Borel-messbar ist, so sind f_i für $i = 1, \ldots, n$ Borel-messbar.

[1] vgl. Satz über die Erhaltung der Messbarkeit bei punktweiser Konvergenz aus der Vorlesung

Aufgabe 4.5: (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Menge $\{f(x) | x \in A\}$ mit $A = \{x \in \mathbb{R} : f'(x) = 0\}$ für eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lebesguesche Nullmenge ist.

Aufgabe 4.6: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Cantorfunktion $\phi : [0,1] \to [0,1]$ gegeben durch

$$\phi(x) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i/2}{2^i} \,\middle|\, x \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \text{ mit } a_i \in \{0,2\} \text{ für alle } i \in \mathbb{N} \right\}.$$

stetig und wachsend ist.

Bemerkung: Die Cantorfunktion ist in allen Punkten der Cantorschen Menge C nicht differenzierbar und in allen Punkten, die nicht in C liegen, differenzierbar. Die kompakte Cantorsche Menge[2] $C \subset [0,1]$ ist dabei rekursiv definiert:

i) $C_1 = [0,1]$,

ii) $C_{n+1} = \frac{1}{3}C_n \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n)$ für $n \in \mathbb{N}$, und schließlich

iii) $C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$.

[2] Siehe `http://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_set`