Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Andreas Griewank PhD.; Dipl.Math. Torsten Bosse

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis 3 (WS 2011/2012) Serie 5

Abgabe bis 22.11.2011 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 5.1: (5 Punkte)

Bezeichne T^+ die Menge der einfachen Funktion über (X, S) mit der Dartstellung

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}(x), a_i \geq 0 \text{ und disjunkten } A_i \in S.$$

Zeigen Sie, dass T^+ ein konvexer Kegel ist, dh., für beliebige $g, h \in T^+$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$\alpha g + \beta h \in T^+.$$

Aufgabe 5.2: (5 Punkte)

Sei $f : X \to [0, \infty]$ messbar und $E_1, E_2 \subset X$ messbar. Beweisen Sie für das Integral

$$\int_E f d\mu := \sup \left\{ \int_E \phi \; d\mu : \phi \text{ einfach, } 0 \leq \phi \leq f \right\}$$

die folgenden Eigenschaften (siehe Vorlesung):

i) $\int_{E_1} \alpha f d\mu = \alpha \int_{E_1} f d\mu$, falls $\alpha \geq 0$;

ii) $\int_{E_1 \cup E_2} f d\mu = \int_{E_1} f d\mu + \int_{E_2} f d\mu$, falls $E_1 \cap E_2 = \emptyset$;

iii) $\int_{E_1} f d\mu \leq \int_{E_2} f d\mu$, falls $E_1 \subseteq E_2$.

Aufgabe 5.3: (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass für eine positive einfache messbare Funktion f gilt

$$\int_X f d\mu = \sum_{a \in f(X)} \int_X a \chi_{\{f=a\}} d\mu.$$

Aufgabe 5.4: (5 Punkte)

Verifizieren Sie die folgende Ungleichung für eine messbare Funktion f und alle $c \in (0, \infty)$:

$$\mu\left[\{|f| \geq c\}\right] \leq \frac{1}{c} \int_X |f| d\mu.$$

Folgern Sie daraus, dass für jede monotone wachsende Funktion $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ gilt

$$\mu\left[\{|f| \geq c\}\right] \leq \frac{1}{h(c)} \int_X h \circ |f| d\mu \quad \forall c \in \mathbb{R}^+ \text{ mit } h(c) > 0.$$