Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Andreas Griewank PhD.; Dipl.Math. Torsten Bosse

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis 3 (WS 2011/2012)
Serie 6

Abgabe bis 29.11.2011 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 6.1: (5 Punkte)

Seien f, g und $f_n : X \to \mathbb{R}$ messbare Funktionen und gelte weiterhin $\int_X g_- d\mu < \infty$ für $g_- = \max(0, -g)$. Zeigen Sie, dass

$$\int_X f d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu$$

gilt, falls $g \leq f_n$ und $f = \liminf_{n\to+\infty} f_n$ μ-fast überall auf X.

Bemerkung: Eine Eigenschaft gilt (μ)-fast überall in einem Maßraum $(X, \mathcal{S}, \mu)$, wenn es eine μ-Nullmenge N gibt, sodass alle Elemente in deren Komplement N^C diese Eigenschaft haben.

Aufgabe 6.2: (3 Punkte)

Betrachten Sie die messbare Funktion $f : I \to [0, 1]$ auf einem Intervall $I \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass die Menge $V := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 \in [a, b],\ x_1^2 + x_2^2 < f(x_3)^2\right\}$ eine Borel-Menge ist und es gilt

$$\lambda_3(V) = \pi \int_a^b f(x_3)^2 dx_3.$$

Aufgabe 6.3: (3+3 Punkte)

Bestimmen Sie die Volumina der folgenden beiden Figuren aus $\mathbb{R}^3$:

$$A_1 = \left\{(x_1, x_2, x_3) : 0 \leq x_3,\ 1 \leq x_2^2 + x_3^2 \leq 2,\ 0 \leq x_1 + x_3 \leq 5\right\} \text{ und}$$
$$A_2 = \left\{(x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) = x_3 \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}x_3) & -\sin(\frac{\pi}{4}x_3) \\ \sin(\frac{\pi}{4}x_3) & \cos(\frac{\pi}{4}x_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, x_3 \in [0, 1], \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in W \right\},$$

wobei $W = \operatorname{conv}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$.

Hinweis: Verwenden Sie geeignete Koordinatensysteme und die Eigenschaften des Lebesguemaßes unter (linearen) Abbildungen. Eine Skizze hilft bei der Veranschaulichung.

Aufgabe 6.4: (3+3 Punkte)

Konstruiert man einen Körper $A \subset \mathbb{R}^3$ (beschränkt, messbar) aus einem homogenen Material, dann bestimmen sich die Koordinaten des Masseschwerpunktes als

$$(S_{x_1}, S_{x_2}, S_{x_3}) = \frac{1}{\lambda_3(A)} \left(\int_A x_1 \, d\lambda_3, \int_A x_2 \, d\lambda_3, \int_A x_3 \, d\lambda_3 \right).$$

Berechnen Sie den Schwerpunkt des *'Lastkran'* Körpers $A(\tau) = A_1 \cup A_2 \cup A_3(\tau)$, der als Vereinigung der folgenden Figuren

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x_1, x_2, x_3) \ : \ x_1^2 + x_2^2 \leq 1, \ 0 \leq x_3 \leq 1\} \\ A_2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \ : \ |x_1| \leq 0.5, \ |x_2| \leq 0.5, \ 1 \leq x_3 \leq 3\} \\ A_3 &= \{(x_1, x_2, x_3) \ : \ |x_1| \leq 0.5, \ -0.5 \leq x_2 \leq \tau, \ 3 \leq x_3 \leq 4\} \end{aligned}$$

gegeben ist, wobei $\tau \in \mathbb{R}^+$ einen Parameter darstellt.

i) Berechnen Sie den Schwerpunkt $(S_{x_1}, S_{x_2}, S_{x_3})(\tau)$ des Objekts in Abhängigkeit von τ.

ii) Bestimmen Sie die maximale Auslage, für welche der Kran *'nicht kippt'*[1], dh. finden Sie das maximale $\tilde{\tau} \in \mathbb{R}^+$ mit

$$(S_{x_1}^2 + S_{x_2}^2)(\tilde{\tau}) \leq 1.$$

[1] Die Mengen A_i seien dazu an den jeweiligen Schnittflächen fest verbunden