Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Andreas Griewank PhD.; Dipl.Math. Torsten Bosse

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis 3 (WS 2011/2012) Serie 7

Abgabe bis 6.12.2011 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 7.1: (5 Punkte)

Seien $(X_i, \mathcal{S}_i)_{i\in\mathcal{I}}$ messbare Räume und bezeichne

$$\bigotimes_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{S}_i$$

die Produkt σ-Algebra, d.h., die kleinste σ-Algebra auf $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$, für die alle Projektionen messbar sind. Zeigen Sie, dass für die Borelschen σ-Algebren gilt:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \bigotimes_{i=1,\dots,n} \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Aufgabe 7.2: (5 Punkte)

Betrachten Sie die Lebesguesche Produkt σ-Algebra

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^q) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R}^p) = \sigma\left(\left\{\bigcup_{i=1}^{m}(l_i^1 \times l_i^2) : l_i^1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^q) \text{ und } l_i^2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)\right\}\right).$$

Beweisen Sie die Inklusion $\mathcal{L}(\mathbb{R}^q) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R}^p) \subsetneq \mathcal{L}(\mathbb{R}^{q+p})$ und zeigen Sie, dass diese strikt ist.

Aufgabe 7.3: (5 Punkte)

Für $i \in \{1,2,3\}$ sei (X_i, S_i, μ_i) ein σ-endlicher Maßraum, desweiteren bezeichne $\mu_i \otimes \mu_j$ das eindeutige Produktmaß auf dem entsprechenden Messraum $(X_i \times X_j, S_i \otimes S_j)$. Zeigen Sie die Assoziativität des Produktmaßes

$$(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3).$$

Aufgabe 7.4: (5 Punkte)

Überprüfen Sie für die Funktionen $f : \mathbb{R}^2_{+\backslash\{0\}} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = (x-y)/(x+y)^3$$

und

$$f(x,y) = \begin{cases} 2^{2n} & \text{für } 2^{-n} < x \leq 2^{-n+1}, 2^{-n} < y \leq 2^{-n+1}, n \in \mathbb{N} \\ -2^{2n+1} & \text{für } 2^{-n-1} < x \leq 2^{-n}, 2^{-n} < y \leq 2^{-n+1}, n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

welche der (Borel-Lebesgue)-Integrale:

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx \right) dy, \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy \right) dx, \int_{(0,1)^2} f(x,y) d\beta^2(x,y)$$

existieren und stimmen überein.