



Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis 3 (WS 2011/2012)
Serie 8

Abgabe bis 13.12.2011 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 8.1: (2, 2, 2 Punkte)

Benutzen Sie den Satz von Fubini und die Transformationsformel um die folgenden Integrale zu bestimmen:

- (1) $\int_A x_1^2 + x_2^2 d\lambda_2(x)$ mit $A = \{x_1 + x_2 \leq 2, x_1, x_2 \geq 0\}$,
- (2) $\int_A e^{\frac{x_1+x_2}{x_1-x_2}} d\lambda_2(x)$ mit $A = \{x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_2 + 1 \leq x_1 \leq x_2 + 2\}$ und
- (3) $\int_A \sin(x_1) d\lambda_2(x)$ mit $A = \{x_1^2 + x_2^2 \leq \pi, x_1 * x_2 \geq 0\}$.

Aufgabe 8.2: (4 Punkte)

Prüfen Sie, ob das folgende Integral als uneigentliches Riemann-Integral oder als Lebesgue-Integral existiert, und zeigen Sie:

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos(t)}{t^2 e^t} dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2.$$

Aufgabe 8.3: (3 Punkte)

Betrachten Sie den vereinfachten Hochofen $A = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1^2 + x_2^2 \leq 4, 0 \leq x_3 \leq 4\}$ mit folgender Temperaturverteilung $T(x_1, x_2, x_3)$:

Am Ursprung $(0, 0, 0)$ betrage die Temperatur 1000 Grad. Nehmen Sie an, dass die Temperatur horizontal in Richtung Hülle des Zylinders linear um den Faktor 20 radial abnehme. Der Temperaturabfall in der Vertikalen (Richtung Decke) sei ebenfalls linear um den Faktor 20. Bestimmen Sie die Durchschnittstemperatur

$$T_{\text{Durchschnitt}} = \frac{1}{\lambda_3(A)} \int_A T(x_1, x_2, x_3) d\lambda_3(x)$$

innerhalb des Hochofens.

Aufgabe 8.4: (3 Punkte)

Seien $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ zwei messbare Funktionen, sodass $|f|^2$ und $|g|^2$ Lebesgue-integrierbar sind. Zeigen Sie die folgende Ungleichung

$$\left(\int_X |fg| d\mu \right)^2 \leq \left(\int_X |f|^2 d\mu \right) \left(\int_X |g|^2 d\mu \right).$$

Aufgabe 8.5: (4 Punkte)

In Analysis I wurde gezeigt, dass eine Funktion auf $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ genau dann Grenzwert von Treppenfunktionen bezüglich der Supremumsnorm ist, wenn sie überall einen linken und rechten Grenzwert hat. Zeigen Sie möglichst direkt, dass die Funktion dann Lebesgue integrierbar ist.