HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. ANDREAS GRIEWANK PHD.; DIPL.MATH. TORSTEN BOSSE

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis 3 (WS 2011/2012) Serie 9

Abgabe bis 03.01.2012 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 9.1: (6 Punkte)

Sei $f : (a,b) \times X \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion über einem nichtleeren Intervall (a,b) mit $t_0 \in (a,b)$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Funktion $F : (a,b) \to \mathbb{R}$

$$F(t) := \int_X f(t,x) d\lambda(x)$$

stetig in t_0 ist, wenn die folgenden Vorraussetzungen erfüllt sind:

i) $f(\cdot, x)$ ist stetig in t_0 für alle $x \in X$,

ii) $f(t, \cdot)$ ist messbar für alle $t \in (a,b)$ und

iii) es existiert eine Lebesgue-integrierbare Majorante $h : X \to \mathbb{R}$ mit

$$sup_{t\in(a,b)} |f(t,x)| \leq h(x) \text{ für alle } x \in X.$$

Finden und begründen Sie drei Gegenbeispiele, bei denen jeweils genau eine der Vorraussetzungen verletzt ist.

Aufgabe 9.2: (5 Punkte)

Ändern Sie die vorherige Aussage für Lipschitz-stetige Funktionen ab. Das heisst, finden Sie die (möglichst natürlichen) Vorraussetzungen an $f : (a,b) \times X \to \mathbb{R}$, so dass die Funktion $F : (a,b) \to \mathbb{R}$

$$F(t) := \int_X f(t,x) d\lambda(x)$$

Lipschitz-stetig in einer Umgebung von t_0 ist und beweisen Sie damit die gewünschte Aussage.

Aufgabe 9.3: (5 Punkte)

Zeigen Sie induktiv, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\int_{(0,1)} (x \ln x)^k d\lambda(x) = (-1)^k \left(\frac{1}{k+1} \right)^{k+1} \Gamma(k+1).$$

Aufgabe 9.4: (4 Punkte)

Ist $N \subset \mathbb{R}$ eine Lebesguesche Nullmenge, so existiert eine wachsende absolut-stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die in keinem $x \in N$ differenzierbar ist.

Hinweis: Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ heisst absolut-stetig in (a, b), falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $d > 0$ existiert, so dass aus der Bedingung $\sum_{i \in \mathcal{I}} (b_i - a_i) < \delta$ folgt $\sum_{i \in \mathcal{I}} |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon$ für jedes System von offenen, paarweise disjunkten Teilintervallen $(a_i, b_i)_{i \in \mathcal{I}}$ mit $(a_i, b_i) \subset (a, b)$.