Übungsaufgaben 14

Integration längs eines Weges

Aufgabe 1. Seien Intervallgrenzen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ des abgeschlossenen beschränkten Intervalls $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ sowie zwei Stammfunktionen $\rho : X \to \mathbb{R}$ und $\alpha : X \to \mathbb{R}$ regulierter Funktionen gegeben, so daß $\rho(t) \geq \rho_0$ für jedes $t \in X$ und eine untere Schranke $\rho_0 > 0$ gilt. Sei desweiteren der Weg $\gamma : X \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\gamma(t) = \rho(t)\,\mathrm{Exp}(2\pi\mathbb{i}\alpha(t)) = \rho(t)(\cos 2\pi\alpha(t), \sin 2\pi\alpha(t)) \quad \text{für } t \in X.$$

1. Man zeige, daß unter diesen Voraussetzungen stets folgende Beziehung gilt:

$$\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln(\rho(b)) - \ln(\rho(a)) + 2\pi\mathbb{i}(\alpha(b) - \alpha(a)).$$

2. Man gebe zugleich *notwendige* und *hinreichende* Bedingungen an ρ und α an, unter denen γ ein *geschlossener* Weg ist und berechne für diesen Fall die Windungszahl $\mathrm{ind}(\gamma, \mathbb{0}) \in \mathbb{Z}$ von γ in bezug auf den Nullpunkt! ⑥

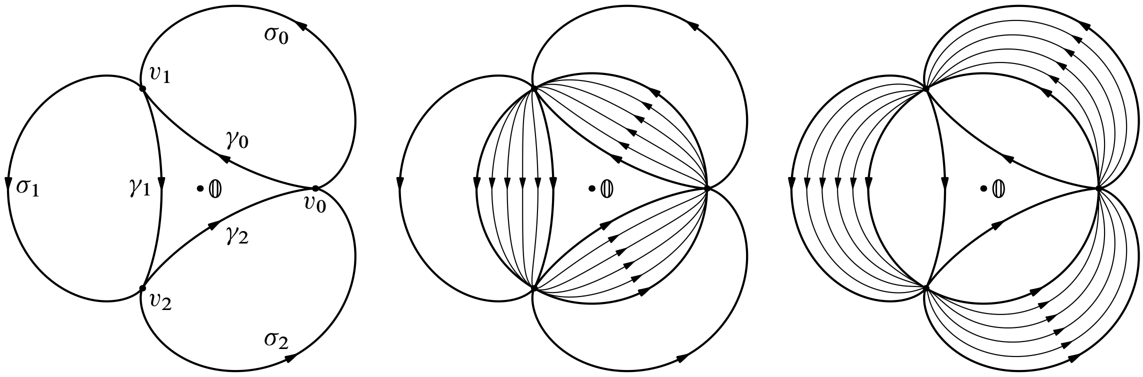
Aufgabe 2. Seien der *geschlossene* Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ entlang der Einheitskreislinie $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ und die stetige Funktion $g : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ durch

$$\gamma(t) = \mathrm{Exp}(\mathbb{i}t) = (\cos t, \sin t) \quad \text{für } t \in [0, 2\pi] \quad \text{und} \quad g(\zeta) = \frac{\mathbb{1}}{\zeta(\zeta - \mathbb{2})} \quad \text{für } \zeta \in \mathbb{S}$$

vorgegeben. Man berechne die Werte

$$f(z) = \frac{\mathbb{1}}{2\pi\mathbb{i}} \int_\gamma \frac{g(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{S}$$

der Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ durch Teilbruchzerlegungen! ⑥



Aufgabe 3. Seien die Wege $\gamma_k, \sigma_k : \left[\frac{2\pi k}{3}, \frac{2\pi(k+1)}{3}\right] \to \mathbb{C}$ für $k \in \{0, 1, 2\}$ durch

$$\gamma_k(t) = \left(\tfrac{2}{3}\cos t + \tfrac{1}{3}\cos 2t, \tfrac{2}{3}\sin t - \tfrac{1}{3}\sin 2t\right) \quad \text{für } t \in \left[\tfrac{2\pi k}{3}, \tfrac{2\pi(k+1)}{3}\right],$$
$$\sigma_k(t) = \left(\tfrac{4}{3}\cos t - \tfrac{1}{3}\cos 4t, \tfrac{4}{3}\sin t - \tfrac{1}{3}\sin 4t\right) \quad \text{für } t \in \left[\tfrac{2\pi k}{3}, \tfrac{2\pi(k+1)}{3}\right]$$

definiert sowie die drei *geschlossenen* Wege $\gamma = \gamma_0 \oplus \gamma_1 \oplus \gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ und $\sigma = \sigma_0 \oplus \sigma_1 \oplus \sigma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ sowie $\omega = \gamma_0 \oplus \sigma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \sigma_0 \oplus \gamma_1 \oplus \sigma_2 : [0, 4\pi] \to \mathbb{C}$ durch entsprechende Zusammensetzungen gegeben.

1. Man bestimme die Länge des geschlossenen Weges ω!
2. Man berechne die Windungszahl

$$\operatorname{ind}(\omega, \mathbb{0}) = \frac{\mathbb{1}}{2\pi\mathbb{i}} \int_\omega \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{\mathbb{1}}{2\pi\mathbb{i}} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{\mathbb{1}}{2\pi\mathbb{i}} \int_\sigma \frac{d\zeta}{\zeta} \in \mathbb{Z}$$

des Weges ω in bezug auf $\mathbb{0}$, indem man *einen* der folgenden Lösungswege wählt:

2.1. Man berechne die beiden Integrale längs γ und σ direkt (und mühsam) mittels elementarer Variablentransformationen zur Integration der Verkettung rationaler und trigonometrischer Funktionen!

2.2. Sei der *geschlossene* Weg $\varkappa : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ entlang einer Kreislinie durch

$$\varkappa(t) = \operatorname{Exp}(\mathbb{i}t) = (\cos t, \sin t) \quad \text{für } t \in [0, 2\pi] \text{ gegeben.}$$

Man finde eine *geschlossene* Deformation $\varphi : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{C}$ von γ in $\varkappa$ innerhalb von $\mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}\}$ sowie eine *geschlossene* Deformation $\psi : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{C}$ von σ in $\varkappa$ innerhalb von $\mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}\}$, die eine (elegante) Zurückführung beider Integrale längs γ und σ auf Integrale längs $\varkappa$ mit Hilfe des Integralsatzes von Cauchy gestattet! ⑧