Übungsaufgaben 15

Pole und Nullstellen komplexer Funktionen

Aufgabe 1. Sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{i}, -\mathbb{i}\}$ ein Punkt mit $|\mathbb{i} - z_0| < |-\mathbb{i} - z_0|$. Man bestimme jene Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{Z}$, für welche die Laurent-Reihe $\left(\sum_{k=m}^{n} a_k (z - z_0)^k\right)$ um den Mittelpunkt z_0 im Grenzprozeß $n \to \infty$ und $m \to -\infty$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ im

1. Kreisinneren $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < |\mathbb{i} - z_0|\}$,
2. Kreisring $\{z \in \mathbb{C} \mid |\mathbb{i} - z_0| < |z - z_0| < |-\mathbb{i} - z_0|\}$,
3. Kreisäußeren $\{z \in \mathbb{C} \mid |-\mathbb{i} - z_0| < |z - z_0|\}$,

jeweils gegen den Grenzwert

$$s(z) = \frac{2\mathbb{i}}{(z - \mathbb{i})(z + \mathbb{i})}$$

konvergiert! ⑥

Aufgabe 2. Seien $k, \ell \in \mathbb{N}$ mit $0 < k < \ell$ sowie $w = \operatorname{Exp}\left(\frac{\pi}{\ell}\mathbb{i}\right) \in \mathbb{C}$ gegeben. Ferner werden für ein beliebig vorgegebenes $r > 1$ die Wege $\gamma_1, \gamma_2 : [0, r] \to \mathbb{C}$ sowie $\gamma_3 : \left[0, \frac{2\pi}{\ell}\right] \to \mathbb{C}$ und $\gamma_4 : \left[\frac{2\pi}{\ell}, 2\pi\right] \to \mathbb{C}$ betrachtet, die wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (t, 0) \quad \text{für } t \in [0, r], & \gamma_3(t) &= r\operatorname{Exp}(\mathbb{i}t) \quad \text{für } t \in \left[0, \tfrac{2\pi}{\ell}\right], \\ \gamma_2(t) &= tw^2 \quad \text{für } t \in [0, r], & \gamma_4(t) &= r\operatorname{Exp}(\mathbb{i}t) \quad \text{für } t \in \left[\tfrac{2\pi}{\ell}, 2\pi\right]. \end{aligned}$$

Man werte das Integral

$$\int_\gamma \frac{z^{k-1}\,dz}{z^\ell + \mathbb{1}} \in \mathbb{C}$$

längs des *geschlossenen* Weges $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_{2\ominus} : \left[0, 2r + \frac{2\pi}{\ell}\right] \to \mathbb{C}$ aus und schließe daraus auf den Wert

$$\int_0^\infty \frac{t^{k-1}\,dt}{t^\ell + 1} = \frac{\pi}{\ell \sin\frac{\pi k}{\ell}}$$

des uneigentlichen Integrals! ⑧

Aufgabe 3. Seien $n \in \mathbb{N}$ sowie $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ die (nicht notwendig voneinander verschiedenen) Nullstellen der durch $f(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - z_k)$ für $z \in \mathbb{C}$ definierten ganzen rationalen Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

1. Man zeige (induktiv), daß

$$Df(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(z)}{z - z_k} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ gilt!}$$

2. Man weise nach, daß zu jeder Nullstelle $z \in \mathbb{C}$ der Ableitung $Df : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ mit $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ existieren, so daß $z = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k$ gilt! ⑥