Übungsaufgaben 5

Stetige Funktionen

Aufgabe 1. Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \sqrt[3]{\sqrt{1+x^2}+x} - \sqrt[3]{\sqrt{1+x^2}-x} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ gegeben.}$$

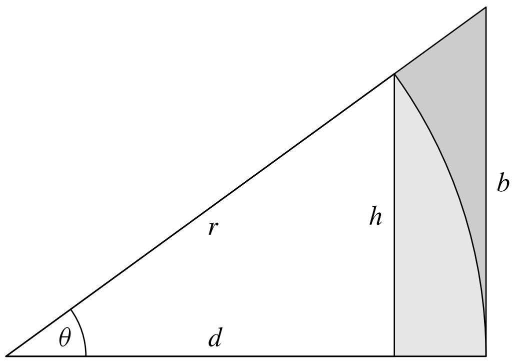
Man zeige, daß die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv ist, berechne (mit Hilfe binomischer Formeln) ihre inverse Funktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und begründe, warum die Funktionen $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton sind! ⑧

Aufgabe 2. Seien $X = [1, \infty[$ und die beiden Funktionen $f, g : X \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} \quad \text{bzw.} \quad g(x) = \left(2\sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right) x\sqrt{x}$$

für $x \in X$ definiert. Man zeige, daß die Grenzwerte $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to\infty} g(x)$ existieren und berechne diese Werte! ⑥

Aufgabe 3. Seien gemäß Abbildung ein Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $r > 0$ sowie ein Sektor gegeben, der von den beiden vom Nullpunkt ausgehenden Schenkeln des Winkels $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ und der Kreislinie eingeschlossen wird.



1. Die zum unteren Schenkel senkrechte Strecke h durch den Schnittpunkt der Kreislinie mit dem oberen Schenkel schneidet vom Kreissektor ein rechtwinkliges Dreieck ab. Man berechne den Flächeninhalt $F_1(\theta)$ der hellgrauen Restfläche!

2. Von den beiden Schenkeln des Winkels θ und der Parallelen b zur Strecke h durch den Schnittpunkt der Kreislinie mit dem unteren Schenkel wird ein rechtwinkliges Dreieck eingeschlossen. Die Kreislinie schneidet von diesem Dreieck den Kreissektor ab. Man bestimme den Flächeninhalt $F_2(\theta)$ der dunkelgrauen Restfläche!

3. Man weise (mit Hilfe bekannter Grenzwerte für trigonometrische Funktionen) nach, daß sich im Grenzfall $\theta \downarrow 0$ die Beziehung

$$\lim_{\theta \downarrow 0} \frac{F_1(\theta)}{F_2(\theta)} = 2$$

für das Verhältnis beider Flächeninhalte ergibt! ⑥