Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Jens A. Griepentrog

Mathematik für Naturwissenschaftler I
Wintersemester 2019/2020
28. Januar 2020

Musterklausur

Name:	
Vorname:	
Studiengang:	
Matrikelnummer:	

Ergebnis

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
Mögliche Punktzahl	8	8	8	8	8	40
Erreichte Punktzahl						
Korrektor						

Hinweise

1. Bitte füllen Sie das Deckblatt vollständig und gut lesbar aus!
2. Sie können als Hilfsmittel ein beidseitig handbeschriebenes A4-Blatt benutzen.
3. Sie haben 90 Minuten Zeit für die Lösung der Aufgaben.
4. Bitte fangen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt an!
5. Versehen Sie *alle* Lösungsblätter mit Ihrer Matrikelnummer und Ihrem Namen!
6. Die Lösungen zu den Aufgaben sollen möglichst gut begründet werden!
7. Aufgaben können auch in Teilen bearbeitet werden.
8. Nach dem Klausurende sind die Lösungsblätter im Faltblatt abzugeben!

Aufgabe 1. Man weise (durch Teilung des Einheitskreises) nach, daß die Beziehung

$$\sum_{k=0}^{n} 2\cos\frac{2\pi k}{2n+1} = 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt! ⑧

Lösung. 1. Seien $n \in \mathbb{N}$ sowie die $(2n+1)$*-ten Einheitswurzeln*

$$v_k = \left(\cos\frac{2\pi k}{2n+1}, \sin\frac{2\pi k}{2n+1}\right) \in \mathbb{C} \quad \text{für } k \in \{0, 1, \ldots, 2n\}$$

vorgegeben. Da wegen der Moivre-Formel $v_1^{2n+1} = (\cos 2\pi, \sin 2\pi) = \mathbb{1}$ gilt, liefert die Summenformel der geometrischen Reihe für $v_1 \neq \mathbb{1}$ zunächst

$$\sum_{k=0}^{2n} v_1^k = \frac{\mathbb{1} - v_1^{2n+1}}{\mathbb{1} - v_1} = \mathbb{0}$$

und demzufolge

$$\sum_{k=0}^{2n}\left(\cos\frac{2\pi k}{2n+1}, \sin\frac{2\pi k}{2n+1}\right) = \sum_{k=0}^{2n} v_k = \sum_{k=0}^{2n} v_1^k = \mathbb{0}.$$

2. Da die Beziehung $\cos x = \cos(2\pi - x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, folgt daraus

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=0}^{2n}\cos\frac{2\pi k}{2n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2\pi k}{2n+1} + \sum_{k=n+1}^{2n}\cos\frac{2\pi k}{2n+1} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2\pi k}{2n+1} + \sum_{k=n+1}^{2n}\cos\left(2\pi - \frac{2\pi k}{2n+1}\right) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2\pi k}{2n+1} + \sum_{k=n+1}^{2n}\cos\frac{2\pi(2n+1-k)}{2n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} 2\cos\frac{2\pi k}{2n+1}
\end{aligned}$$

und somit schließlich

$$\sum_{k=0}^{n} 2\cos\frac{2\pi k}{2n+1} = 2 + \sum_{k=1}^{n} 2\cos\frac{2\pi k}{2n+1} = 1$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. □

Aufgabe 2. Sei die Potenzreihe (s_n) durch die Teilsummen $s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ für $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ und die Koeffizienten

$$a_k = (k+1)(k+3) \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ vorgegeben.}$$

Man zeige, daß die Potenzreihe (s_n) im Einheitskreis $\mathbb{E} = \big\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\big\}$ punktweise konvergiert und bestimme die Grenzfunktion $s : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$, gegen welche die Potenzreihe (s_n) in $\mathbb{E}$ konvergiert! ⑧

Lösung. 1. Mit Hilfe des Quotientenkriteriums

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+2)(k+4)}{(k+1)(k+3)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\big(1+\frac{2}{k}\big)\big(1+\frac{4}{k}\big)}{\big(1+\frac{1}{k}\big)\big(1+\frac{3}{k}\big)} = 1$$

ergibt sich der Konvergenzradius $R = 1$ der gegebenen Potenzreihe (s_n). Damit konvergiert (s_n) in $\mathbb{E}$ punktweise gegen eine analytische Grenzfunktion $s : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$.

2. Ferner konvergiert die durch die Teilsummen $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k$ für $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ definierte geometrische Reihe (f_n) in $\mathbb{E}$ punktweise gegen die durch $f(z) = \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1}-z}$ für $z \in \mathbb{E}$ definierte analytische Grenzfunktion $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ und somit auch die m-mal summandenweise differenzierte Potenzreihe $(D^m f_n)$ in $\mathbb{E}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ gegen die m-te Ableitung $D^m f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ der Grenzfunktion $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$. Für $m \in \{1, 2\}$ und jedes $z \in \mathbb{E}$ folgt

$$\frac{\mathbb{1}}{(\mathbb{1}-z)^2} = Df(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) z^k,$$

$$\frac{\mathbb{2}}{(\mathbb{1}-z)^3} = D^2 f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) z^k$$

und somit schließlich durch Addition die Gestalt

$$s(z) = \frac{\mathbb{1}}{(\mathbb{1}-z)^2} + \frac{\mathbb{2}}{(\mathbb{1}-z)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+3) z^k \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E}$$

der Grenzfunktion $s : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ der konvergenten Potenzreihe (s_n). □

Aufgabe 3. Seien die Intervallgrenzen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$ beliebig vorgegeben. Man berechne für jeden Parameter $\beta \in \mathbb{R}$ den Wert des Integrals

$$f(\beta) = \int_a^b x^{\beta-1} \ln(x)\, dx$$

und weise nach, daß die dadurch definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist! ⑧

Lösung. 1. Im Falle $\beta \neq 0$ führt teilweise Integration auf ein Grundintegral: Es gilt

$$\begin{aligned} f(\beta) = \int_a^b x^{\beta-1} \cdot \ln(x)\, dx &= \frac{b^\beta \ln(b) - a^\beta \ln(a)}{\beta} - \int_a^b \frac{x^\beta}{\beta} \cdot \frac{1}{x}\, dx \\ &= \frac{b^\beta \ln(b) - a^\beta \ln(a)}{\beta} - \int_a^b \frac{x^{\beta-1}}{\beta}\, dx = \frac{b^\beta \ln(b) - a^\beta \ln(a)}{\beta} - \frac{b^\beta - a^\beta}{\beta^2}\,. \end{aligned}$$

2. Im Falle $\beta = 0$ wird das Integral durch teilweise Integration reproduziert: Es gilt

$$\int_a^b \frac{1}{x} \cdot \ln(x)\, dx + \int_a^b \ln(x) \cdot \frac{1}{x}\, dx = \ln^2(b) - \ln^2(a),$$

woraus sich folgender Wert des Integrals ergibt:

$$f(0) = \int_a^b \frac{\ln(x)\, dx}{x} = \frac{\ln^2(b) - \ln^2(a)}{2}\,.$$

3. Als Verkettung von Exponential- und rationalen Funktionen ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in jedem Punkt $\beta \neq 0$ stetig. Die Stetigkeit im Punkt $\beta = 0$ wird durch Anwendung der Regel von Bernoulli-de L'Hospital nachgewiesen: Wegen Schritt 1 gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\beta\to 0} f(\beta) &= \lim_{\beta\to 0} \frac{(\beta \ln(b) - 1)\exp(\beta \ln(b)) - (\beta \ln(a) - 1)\exp(\beta \ln(a))}{\beta^2} \\ &= \lim_{\beta\to 0} \frac{\beta \ln^2(b) \exp(\beta \ln(b)) - \beta \ln^2(a) \exp(\beta \ln(a))}{2\beta} \\ &= \lim_{\beta\to 0} \frac{\ln^2(b) \exp(\beta \ln(b)) - \ln^2(a) \exp(\beta \ln(a))}{2} = \frac{\ln^2(b) - \ln^2(a)}{2} \end{aligned}$$

und somit tatsächlich $\lim_{\beta\to 0} f(\beta) = f(0)$ aufgrund von Schritt 2. □

Aufgabe 4. Man zeige, daß das beidseitig uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

als Grenzwert eigentlicher Integrale existiert und berechne diesen Wert (durch eine dafür geeignete Variablentransformation)! ⑧

Lösung. Definiert man durch $\varphi(t) = t^2$ die Transformation $\varphi :]0,\infty[\to]0,\infty[$ der neuen Variablen $t \in]0,\infty[$ in die alte Variable $x \in]0,\infty[$, so führt die Transformationsformel für die neuen Grenzen $a, b \in]0,\infty[$ auf das Grundintegral

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int_a^b \frac{D\varphi(t)\,dt}{(1+\varphi(t))\sqrt{\varphi(t)}} = \int_a^b \frac{2\,dt}{1+t^2} = 2\arctan b - 2\arctan a.$$

Wegen der Beziehungen $\lim_{a\downarrow 0}\varphi(a) = 0$ und $\lim_{b\to\infty}\varphi(b) = \infty$ sowie

$$\lim_{a\downarrow 0}\arctan a = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{b\to\infty}\arctan b = \frac{\pi}{2}$$

ist damit die Existenz des Grenzwerts

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \pi$$

nachgewiesen. □

Aufgabe 5. Sei ein Parameter $\delta > 0$ gegeben und ein uneigentlicher Weg $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ entlang einer *Kettenlinie* mittels

$$\gamma(t) = \big(t, \delta \cosh \tfrac{t}{\delta}\big) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

definiert und für jedes $\tau \in \mathbb{R}$ durch

$$g_\tau(t) = \gamma(\tau) + D\gamma(\tau)(t - \tau) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

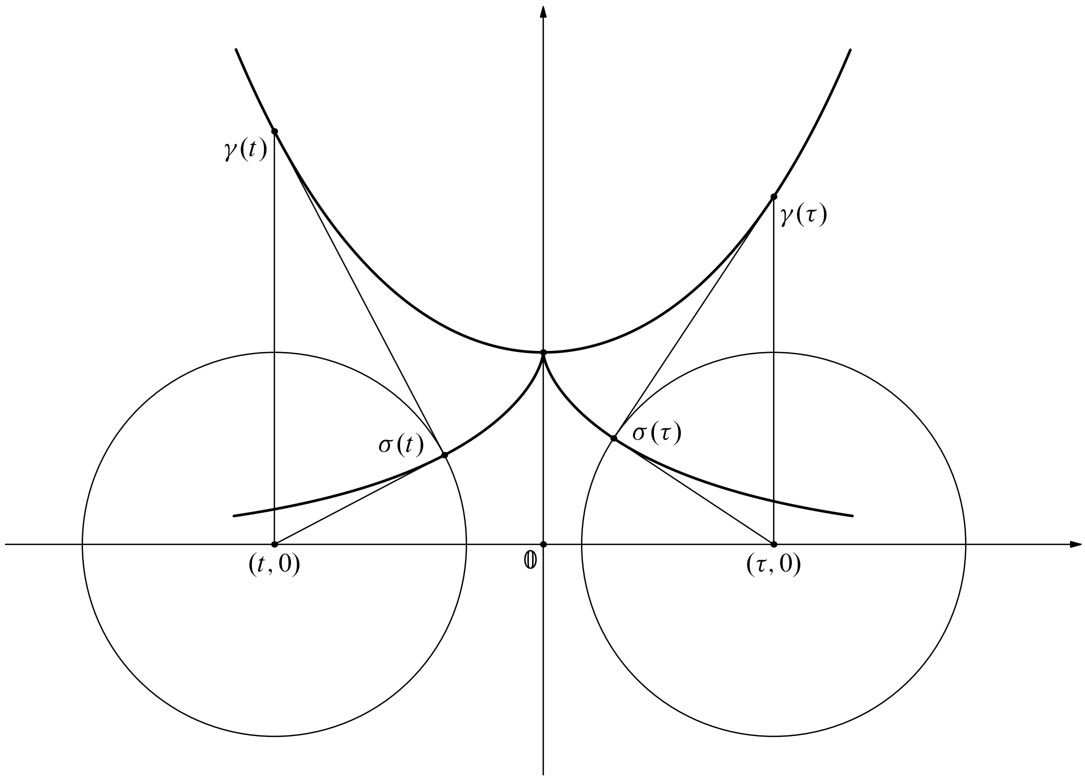
die Linearisierung $g_\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gegeben, welche γ in τ tangential berührt.

1. Man weise nach, daß die Kreislinie $\big\{z \in \mathbb{C} \mid |z - (\tau, 0)| = \delta\big\}$ und die Gerade $\big\{g_\tau(t) \in \mathbb{C} \mid t \in \mathbb{R}\big\}$ für jedes $\tau \in \mathbb{R}$ *genau* einen Punkt $\sigma(\tau) \in \mathbb{C}$ gemeinsam haben!

2. Man zeige, daß für den so konstruierten uneigentlichen Weg $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sowohl

$$D\sigma(\tau) = \tfrac{1}{\delta} \tanh \tfrac{\tau}{\delta} \cdot \big((\tau, 0) - \sigma(\tau)\big) \quad \text{als auch} \quad \left| \int_0^\tau |D\gamma(t)|\, dt \right| = |\gamma(\tau) - \sigma(\tau)|$$

für jedes $\tau \in \mathbb{R}$ gilt! ⑧



Lösung. 1. Die Linearisierung $g_\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ von γ in $\tau \in \mathbb{R}$ hat die Gestalt

$$g_\tau(t) = \left(\tau, \delta \cosh \tfrac{\tau}{\delta}\right) + (t-\tau)\left(1, \sinh \tfrac{\tau}{\delta}\right) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

Somit muß jeder Punkt $z = (t, \xi) \in \mathbb{C}$, welcher auf der Geraden $\left\{g_\tau(t) \in \mathbb{C} \mid t \in \mathbb{R}\right\}$ und der Kreislinie $\left\{z \in \mathbb{C} \mid |z - (\tau, 0)| = \delta\right\}$ liegt, den beiden Gleichungen

$$\delta \cosh \tfrac{\tau}{\delta} + (t-\tau) \sinh \tfrac{\tau}{\delta} = \xi \tag{1}$$

$$(t-\tau)^2 + \xi^2 = \delta^2 \tag{2}$$

genügen. Setzt man die Gleichung (1) in die Gleichung (2) ein, dann ergibt sich aufgrund des Additionstheorems $\cosh^2\left(\frac{\tau}{\delta}\right) - \sinh^2\left(\frac{\tau}{\delta}\right) = 1$ die quadratische Gleichung

$$\begin{aligned}
0 &= (t-\tau)^2 + \left(\delta \cosh \tfrac{\tau}{\delta} + (t-\tau) \sinh \tfrac{\tau}{\delta}\right)^2 - \delta^2 \\
&= (t-\tau)^2 \left(1 + \sinh^2\left(\tfrac{\tau}{\delta}\right)\right) + 2\delta(t-\tau) \cosh \tfrac{\tau}{\delta} \sinh \tfrac{\tau}{\delta} + \delta^2 \cosh^2\left(\tfrac{\tau}{\delta}\right) - \delta^2 \\
&= (t-\tau)^2 \cosh^2\left(\tfrac{\tau}{\delta}\right) + 2\delta(t-\tau) \cosh \tfrac{\tau}{\delta} \sinh \tfrac{\tau}{\delta} + \delta^2 \sinh^2\left(\tfrac{\tau}{\delta}\right) \\
&= \left((t-\tau) \cosh \tfrac{\tau}{\delta} + \delta \sinh \tfrac{\tau}{\delta}\right)^2
\end{aligned}$$

in t, welche die *eindeutig* bestimmte Lösung $t = \tau - \delta \tanh \frac{\tau}{\delta} \in \mathbb{R}$ hat. Setzt man diese Lösung in Gleichung (1) ein, so erhält man wegen $\cosh^2\left(\frac{\tau}{\delta}\right) - \sinh^2\left(\frac{\tau}{\delta}\right) = 1$ folglich

$$\xi = \delta \cosh \tfrac{\tau}{\delta} - \delta \tanh \tfrac{\tau}{\delta} \sinh \tfrac{\tau}{\delta} = \frac{\delta \cosh^2\left(\frac{\tau}{\delta}\right) - \delta \sinh^2\left(\frac{\tau}{\delta}\right)}{\cosh \frac{\tau}{\delta}} = \frac{\delta}{\cosh \frac{\tau}{\delta}}.$$

Für den anfangs beliebig vorgegebenen Punkt $\tau \in \mathbb{R}$ ist somit

$$\sigma(\tau) = \left(\tau - \frac{\delta \sinh \frac{\tau}{\delta}}{\cosh \frac{\tau}{\delta}}, \frac{\delta}{\cosh \frac{\tau}{\delta}}\right) \in \mathbb{C}$$

der *einzige* Punkt, welcher auf der gegebenen Gerade und der angegebenen Kreislinie liegt, wodurch ein differenzierbarer uneigentlicher Weg $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert wird.

2. Der uneigentliche Weg $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ hat in $\tau \in \mathbb{R}$ die Ableitung

$$D\sigma(\tau) = \left(1 - \frac{\cosh^2\left(\frac{\tau}{\delta}\right) - \sinh^2\left(\frac{\tau}{\delta}\right)}{\cosh^2\left(\frac{\tau}{\delta}\right)}, -\frac{\sinh \frac{\tau}{\delta}}{\cosh^2\left(\frac{\tau}{\delta}\right)}\right) = \frac{\sinh \frac{\tau}{\delta}}{\cosh \frac{\tau}{\delta}} \left(\frac{\sinh \frac{\tau}{\delta}}{\cosh \frac{\tau}{\delta}}, -\frac{1}{\cosh \frac{\tau}{\delta}}\right).$$

Aufgrund der Gestalt der Differenzen

$$(\tau, 0) - \sigma(\tau) = \delta \left(\frac{\sinh \frac{\tau}{\delta}}{\cosh \frac{\tau}{\delta}}, -\frac{1}{\cosh \frac{\tau}{\delta}}\right) \quad \text{und} \quad \gamma(\tau) - \sigma(\tau) = \delta \sinh \tfrac{\tau}{\delta} \left(\frac{1}{\cosh \frac{\tau}{\delta}}, \frac{\sinh \frac{\tau}{\delta}}{\cosh \frac{\tau}{\delta}}\right)$$

ergibt sich für jedes $\tau \in \mathbb{R}$ einerseits $D\sigma(\tau) = \frac{1}{\delta} \tanh \frac{\tau}{\delta} \cdot \left((\tau, 0) - \sigma(\tau)\right)$ und wegen

$$\int_0^\tau |D\gamma(t)|\, dt = \int_0^\tau \left|\left(1, \sinh \tfrac{t}{\delta}\right)\right| dt = \int_0^\tau \cosh \tfrac{t}{\delta}\, dt = \delta \sinh \tfrac{\tau}{\delta}$$

auch die Übereinstimmung $\left|\int_0^\tau |D\gamma(t)|\, dt\right| = |\gamma(\tau) - \sigma(\tau)|$ der Weglängen. □