Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Jens A. Griepentrog

Mathematik für Naturwissenschaftler I
Wintersemester 2019/2020
2. Juni 2020

Klausur

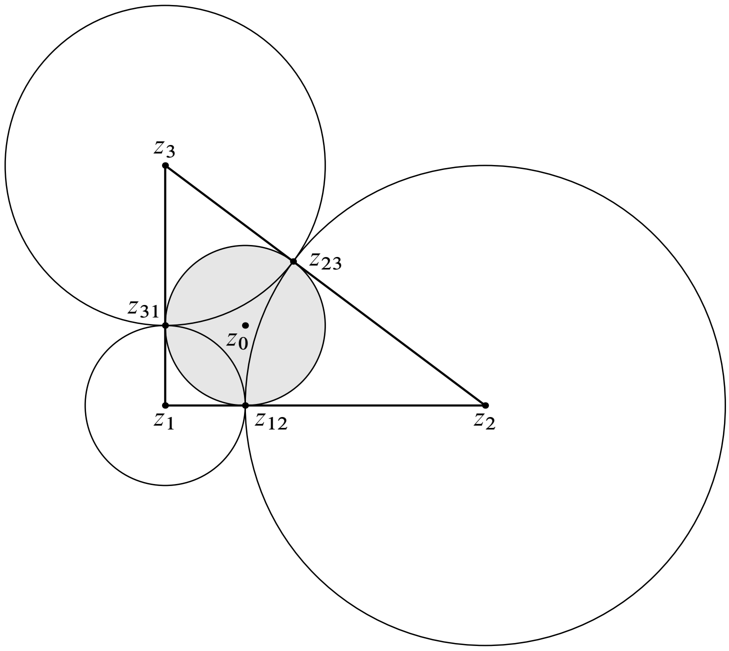
Name:	
Vorname:	
Studiengang:	
Matrikelnummer:	

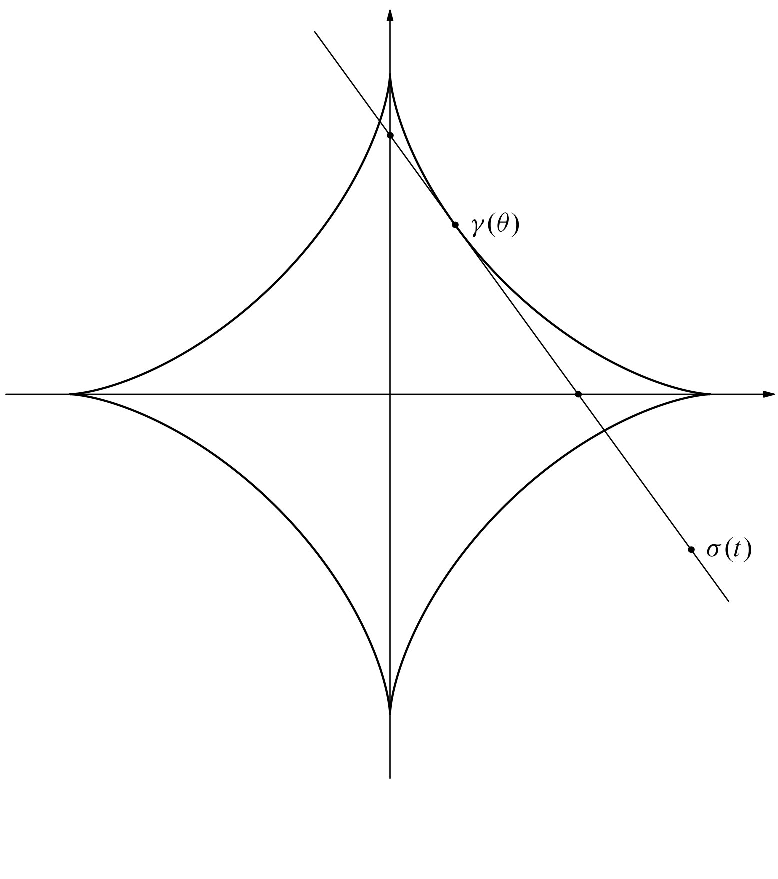
Ergebnis

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
Mögliche Punktzahl	8	8	8	8	8	40
Erreichte Punktzahl						
Korrektor						

Hinweise

1. Bitte füllen Sie das Deckblatt vollständig und gut lesbar aus!
2. Sie können als Hilfsmittel ein beidseitig handbeschriebenes A4-Blatt benutzen.
3. Sie haben 90 Minuten Zeit für die Lösung der Aufgaben.
4. Bitte fangen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt an!
5. Versehen Sie *alle* Lösungsblätter mit Ihrer Matrikelnummer und Ihrem Namen!
6. Die Lösungen zu den Aufgaben sollen möglichst gut begründet werden!
7. Aufgaben können auch in Teilen bearbeitet werden.
8. Nach dem Klausurende sind die Lösungsblätter im Faltblatt abzugeben!


z_3
z_{23}
z_{31}
z_0
z_1
z_{12}
z_2


$\gamma(\theta)$
$\sigma(t)$

Aufgabe 1. Seien $z_1 = (0,0) \in \mathbb{C}$, $z_2 = (20,0) \in \mathbb{C}$ und $z_3 = (0,15) \in \mathbb{C}$ gegeben.

1. Man bestimme die Radien $\delta_k > 0$ der Kreislinien $S_k = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_k| = \delta_k\}$ um die Mittelpunkte $z_k \in \mathbb{C}$ für $k \in \{1,2,3\}$ derart, daß jede dieser Kreislinien jeweils die beiden anderen Kreislinien *von außen berührt!*

2. In welchem Punkt $z_{12} \in \mathbb{C}$, $z_{23} \in \mathbb{C}$ bzw. $z_{31} \in \mathbb{C}$ *berühren* sich jeweils die Kreislinien S_1 und S_2, die Kreislinien S_2 und S_3 bzw. die Kreislinien S_3 und S_1?

3. Man bestimme Mittelpunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und Radius $\delta_0 > 0$ derjenigen Kreislinie $S_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = \delta_0\}$, die durch die drei Punkte $z_{12}, z_{23}, z_{31} \in \mathbb{C}$ verläuft! ⑧

Lösung. 1. Damit sich zwei Kreislinien von außen berühren, muß der Abstand der Mittelpunkte mit der Summe der Radien der beiden Kreise übereinstimmen. Da jede der drei Kreislinien S_k jeweils die beiden anderen Kreislinien von außen berühren soll, ergeben sich daraus die drei Gleichungen

$$\begin{aligned}\delta_1 + \delta_2 &= |z_1 - z_2| = 20\\ \delta_2 + \delta_3 &= |z_2 - z_3| = 25\\ \delta_3 + \delta_1 &= |z_3 - z_1| = 15.\end{aligned}$$

Addiert man alle drei Gleichungen, so erhält man $2(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3) = 60$ und somit $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 30$, woraus $\delta_1 = 5$, $\delta_2 = 15$ und $\delta_3 = 10$ folgt.

2. Durch eine verhältnismäßige Teilung

$$\frac{z_{12} - z_1}{\delta_1} = \frac{z_2 - z_1}{\delta_1 + \delta_2}, \quad \frac{z_{23} - z_2}{\delta_2} = \frac{z_3 - z_2}{\delta_2 + \delta_3}, \quad \frac{z_{31} - z_3}{\delta_3} = \frac{z_1 - z_3}{\delta_3 + \delta_1}$$

der Verbindungsstrecken zwischen je zwei Kreismittelpunkten ergeben sich somit die Berührungspunkte $z_{12} = (5,0)$, $z_{23} = (8,9)$ und $z_{31} = (0,5)$.

3. Für den Mittelpunkt $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{C}$ und den Radius $\delta_0 > 0$ der Kreislinie S_0, welche durch die drei Punkte $z_{12} = (5,0)$, $z_{23} = (8,9)$ und $z_{31} = (0,5)$ verläuft, gilt

$$\begin{aligned}(x_0 - 5)^2 + y_0^2 &= |z_{12} - z_0|^2 = \delta_0^2\\ (x_0 - 8)^2 + (y_0 - 9)^2 &= |z_{23} - z_0|^2 = \delta_0^2\\ x_0^2 + (y_0 - 5)^2 &= |z_{31} - z_0|^2 = \delta_0^2.\end{aligned}$$

Subtrahiert man die zweite von der ersten und die erste von der dritten Gleichung, so ergeben sich die beiden linearen Gleichungen

$$\begin{aligned}6x_0 + 18y_0 &= 120\\ 10x_0 - 10y_0 &= 0\end{aligned}$$

und somit der Mittelpunkt $z_0 = (x_0, y_0) = (5,5) \in \mathbb{C}$ der gesuchten Kreislinie S_0 sowie ihr Radius $\delta_0 = 5$ aufgrund der Gleichung $\delta_0^2 = (x_0 - 5)^2 + y_0^2$. □

Aufgabe 2. Man zeige, daß die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}\, x^{k+2}\right)$ für jedes $x \in\,]-1,1[$ gegen die Summe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{(k+1)(k+2)} = (1-x)\ln(1-x) + x$$

konvergiert! ⑧

Lösung. 1. Da für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Grenzwertbeziehung

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{(k+1)(k+2)x^{k+3}}{(k+2)(k+3)x^{k+2}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k+3}\,|x| = |x|$$

gilt, konvergiert aufgrund des Quotientenkriteriums die durch

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+2}}{(k+1)(k+2)} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

definierte Potenzreihe (g_n) in $]-1,1[$ gegen die durch die Summe

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{(k+1)(k+2)} \quad \text{für } x \in\,]-1,1[$$

definierte analytische Grenzfunktion $g :]-1,1[\, \to \mathbb{R}$.

2. Somit konvergiert auch die m-mal summandenweise differenzierte Potenzreihe $(D^m g_n)$ in $]-1,1[$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ gegen die m-te Ableitung $D^m g :]-1,1[\, \to \mathbb{R}$ der Grenzfunktion $g :]-1,1[\, \to \mathbb{R}$. Für $m \in \{1,2\}$ und jedes $x \in\,]-1,1[$ ergeben sich

$$Dg(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+2)x^{k+1}}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1},$$

$$D^2 g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)x^{k}}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

aufgrund der Summenformel für die geometrische Reihe.

3. Die durch $h(x) = (1-x)\ln(1-x) + x$ für $x \in\,]-1,1[$ definierte analytische Funktion $h :]-1,1[\, \to \mathbb{R}$ besitzt die Ableitungen

$$Dh(x) = -\ln(1-x) \quad \text{sowie} \quad D^2 h(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{für jedes } x \in\,]-1,1[.$$

Da somit $D^2 g(x) = D^2 h(x)$ für alle $x \in\,]-1,1[$ sowie $Dg(0) = Dh(0) = 0$ gilt, liefert der Mittelwertsatz die Übereinstimmung $Dg(x) = Dh(x)$ für *jedes* $x \in\,]-1,1[$. Da außerdem auch $g(0) = h(0) = 0$ gilt, erhält man mit Hilfe des Mittelwertsatzes schließlich die gewünschte Identität $g(x) = h(x)$ für *alle* $x \in\,]-1,1[$. □

Alternative Lösung. 1. Die durch die Teilsummen

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

definierte geometrische Potenzreihe (g_n) konvergiert in $]-1, 1[$ gegen die durch

$$g(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } x \in \,]-1, 1[$$

definierte analytische Grenzfunktion $g :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ und somit die summandenweise integrierte Potenzreihe $\left(\int_0^x g_n(\xi)\, d\xi\right)$ für jedes $x \in \,]-1, 1[$ gegen das Integral $\int_0^x g(\xi)\, d\xi$ über die Grenzfunktion $g :]-1, 1[\to \mathbb{R}$. Für alle $x \in \,]-1, 1[$ gilt somit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x \xi^k\, d\xi = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k\, d\xi = \int_0^x \frac{d\xi}{1-\xi} = -\ln(1-x)$$

aufgrund der Vertauschbarkeit der Grenzprozesse.

2. Damit konvergiert auch die durch die Teilsummen

$$h_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

definierte Potenzreihe (h_n) in $]-1, 1[$ gegen die durch

$$h(x) = -\ln(1-x) \quad \text{für } x \in \,]-1, 1[$$

definierte analytische Grenzfunktion $h :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ und somit die summandenweise integrierte Potenzreihe $\left(\int_0^x h_n(\xi)\, d\xi\right)$ für jedes $x \in \,]-1, 1[$ gegen das Integral $\int_0^x h(\xi)\, d\xi$ über die Grenzfunktion $h :]-1, 1[\to \mathbb{R}$. Es ergibt sich demnach

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x \frac{\xi^{k+1} d\xi}{k+1} = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{k+1}}{k+1}\, d\xi = \int_0^x (-1) \cdot \ln(1-\xi)\, d\xi \\ &= (1-x)\ln(1-x) + \int_0^x \frac{(1-\xi)\, d\xi}{1-\xi} = (1-x)\ln(1-x) + x \end{aligned}$$

für alle $x \in \,]-1, 1[$ nach Vertauschung der Grenzprozesse sowie anschließender teilweiser Integration. $\square$

Aufgabe 3. Sei ein Punkt $x \in \mathbb{R}$ beliebig vorgegeben und für jeden Parameter $\delta > 0$ die Funktion $g_\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$g_\delta(\lambda) = \exp(x + \delta\lambda) - \big((1-\lambda)\exp(x) + \lambda\exp(x+\delta)\big) \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{R}$$

definiert. Man zeige, daß die Funktion $g_\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für jedes $\delta > 0$ ihr Minimum in

$$\lambda_\delta = \frac{1}{\delta}\ln\left(\frac{\exp(\delta) - 1}{\delta}\right) \in \mathbb{R}$$

annimmt und berechne den Grenzwert $\lim_{\delta\downarrow 0}\lambda_\delta \in \mathbb{R}$! ⑧

Lösung. 1. Sei der Parameter $\delta > 0$ beliebig vorgegeben. Die oben definierte Funktion $g_\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist *streng konvex,* denn sie hat in jedem Punkt $\lambda \in \mathbb{R}$ die Ableitungen

$$\begin{aligned} Dg_\delta(\lambda) &= \delta\exp(x+\delta\lambda) + \exp(x) - \exp(x+\delta), \\ D^2 g_\delta(\lambda) &= \delta^2\exp(x+\delta\lambda) > 0. \end{aligned}$$

Die Lösung $\lambda_\delta \in \mathbb{R}$ der Gleichung $Dg_\delta(\lambda_\delta) = 0$ ergibt sich aus

$$\exp(x+\delta) - \exp(x) = \delta\exp(x+\delta\lambda_\delta), \quad \text{also aus} \quad \exp(\delta) - 1 = \delta\exp(\delta\lambda_\delta).$$

Somit nimmt die streng konvexe Funktion $g_\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ihr Minimum im Punkt

$$\lambda_\delta = \frac{1}{\delta}\ln\left(\frac{\exp(\delta) - 1}{\delta}\right) \in \mathbb{R} \quad \text{an.}$$

2. Zur Berechnung des Grenzwerts $\lim_{\delta\downarrow 0}\lambda_\delta \in \mathbb{R}$ soll wegen

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\frac{\exp(\delta) - 1}{\delta} = \lim_{\delta\downarrow 0}\exp(\delta) = 1$$

die Regel von Bernoulli-de L'Hospital eingesetzt werden: Durch mehrmalige Anwendung erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{\delta\downarrow 0}\lambda_\delta &= \lim_{\delta\downarrow 0}\frac{\ln(\exp(\delta) - 1) - \ln(\delta)}{\delta} = \lim_{\delta\downarrow 0}\left(\frac{\exp(\delta)}{\exp(\delta) - 1} - \frac{1}{\delta}\right) \\ &= \lim_{\delta\downarrow 0}\frac{(\delta - 1)\exp(\delta) + 1}{\delta\,(\exp(\delta) - 1)} = \lim_{\delta\downarrow 0}\frac{\delta\exp(\delta)}{(\delta+1)\exp(\delta) - 1} = \lim_{\delta\downarrow 0}\frac{(\delta+1)\exp(\delta)}{(\delta+2)\exp(\delta)} \end{aligned}$$

und somit schließlich $\lim_{\delta\downarrow 0}\lambda_\delta = \frac{1}{2}$ als Grenzwert. □

Aufgabe 4. Für beliebig vorgegebene Grenzen $a, b \in \mathbb{R}$ bestimme man das Integral

$$\int_a^b \sinh x \cdot \sinh 2x \cdot \sinh 3x \, dx$$

durch geeignete Anwendung von Additionstheoremen! ⑧

Lösung. 1. Die Additionstheoreme

$$\cosh(\alpha \pm \beta) = \cosh\alpha \cosh\beta \pm \sinh\alpha \sinh\beta,$$
$$\sinh(\alpha \pm \beta) = \sinh\alpha \cosh\beta \pm \cosh\alpha \sinh\beta$$

liefern Subtraktion bzw. Addition jeweils

$$2\sinh\alpha \cdot \sinh\beta = \cosh(\alpha + \beta) - \cosh(\alpha - \beta),$$
$$2\sinh\alpha \cdot \cosh\beta = \sinh(\alpha + \beta) + \sinh(\alpha - \beta)$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Daraus folgt für jedes $x \in \mathbb{R}$ im ersten Schritt zunächst

$$\sinh x \cdot \sinh 2x = \frac{\cosh 3x - \cosh x}{2}$$

und somit im zweiten Schritt die Darstellung

$$\begin{aligned} \sinh x \cdot \sinh 2x \cdot \sinh 3x &= \frac{\sinh 3x \cdot \cosh 3x}{2} - \frac{\sinh 3x \cdot \cosh x}{2} \\ &= \frac{\sinh 6x}{4} - \frac{\sinh 4x + \sinh 2x}{4}. \end{aligned}$$

2. Das gesuchte Integral wird auf Grundintegrale zurückgeführt: Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_a^b \sinh x \cdot \sinh 2x \cdot \sinh 3x \, dx &= \int_a^b \frac{\sinh 6x - \sinh 4x - \sinh 2x}{4} \, dx \\ &= \frac{\cosh 6b - \cosh 6a}{24} - \frac{\cosh 4b - \cosh 4a}{16} - \frac{\cosh 2b - \cosh 2a}{8} \end{aligned}$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$. □

Aufgabe 5. 1. Man berechne die Länge des durch

$$\gamma(\theta) = \big(\cos^3\theta, \sin^3\theta\big) \quad \text{für } \theta \in [0, 2\pi]$$

definierten *geschlossenen* Weges $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ entlang einer *Sternlinie!*

2. Sei die Linearisierung $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, welche γ in einem beliebig vorgegebenen Punkt $\theta \in \big]0, \frac{\pi}{2}\big[$ *tangential berührt,* durch

$$\sigma(t) = \gamma(\theta) + (t - \theta) D\gamma(\theta) \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \text{ definiert.}$$

Man weise nach, daß die beiden Punkte $(\cos\theta, 0) \in \mathbb{C}$ und $(0, \sin\theta) \in \mathbb{C}$ auf der Geraden $\big\{\sigma(t) \in \mathbb{C} \mid t \in \mathbb{R}\big\}$ liegen! ⑧

Lösung. 1. Die Ableitung von γ in $\theta \in [0, 2\pi]$ hat die Gestalt

$$D\gamma(\theta) = \big(-3\cos^2\theta \sin\theta, 3\sin^2\theta\cos\theta\big) = 3\cos\theta\sin\theta \cdot (-\cos\theta, \sin\theta).$$

Wegen $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ und $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ ergibt sich daraus die Länge

$$\int_0^{2\pi} |D\gamma(\theta)|\, d\theta = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} |\sin 2\theta|\, d\theta = 6\int_0^{\pi/2} \sin 2\theta\, d\theta = 3\cos 0 - 3\cos\pi = 6$$

des Weges $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$.

2. Sei der Punkt $\theta \in \big]0, \frac{\pi}{2}\big[$ beliebig vorgegeben. Wegen $D\gamma(\theta) \neq (0,0)$ kann man dann somit tatsächlich von einer Geraden $\big\{\sigma(t) \in \mathbb{C} \mid t \in \mathbb{R}\big\}$ sprechen.

2.1. Damit der Punkt $(x, 0) \in \mathbb{C}$ auf der Geraden $\big\{\sigma(t) \in \mathbb{C} \mid t \in \mathbb{R}\big\}$ liegt, müssen $x \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}$ die Gleichung $\sigma(t) = (x, 0)$, also

$$\cos^3\theta - 3(t - \theta)\cos^2\theta\sin\theta = x \tag{1}$$

$$\sin^3\theta + 3(t - \theta)\sin^2\theta\cos\theta = 0 \tag{2}$$

erfüllen. Dividiert man Gleichung (2) durch $\sin^2\theta \neq 0$, so erhält man die Beziehung $\sin\theta = -3(t - \theta)\cos\theta$ für den gesuchten Parameter $t \in \mathbb{R}$ und somit in der Tat

$$x = \cos^3\theta - 3(t - \theta)\cos\theta \cdot \cos\theta\sin\theta = \cos^3\theta + \cos\theta\sin^2\theta = \cos\theta$$

wegen Gleichung (1) und $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

2.2. Damit der Punkt $(0, y) \in \mathbb{C}$ zur Geraden $\big\{\sigma(t) \in \mathbb{C} \mid t \in \mathbb{R}\big\}$ gehört, müssen $y \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}$ die Gleichung $\sigma(t) = (0, y)$ und demnach

$$\cos^3\theta - 3(t - \theta)\cos^2\theta\sin\theta = 0 \tag{3}$$

$$\sin^3\theta + 3(t - \theta)\sin^2\theta\cos\theta = y \tag{4}$$

erfüllen. Dividiert man Gleichung (3) durch $\cos^2\theta \neq 0$, so ergibt sich die Beziehung $\cos\theta = 3(t - \theta)\sin\theta$ für den gesuchten Parameter $t \in \mathbb{R}$ und somit tatsächlich

$$y = \sin^3\theta + 3(t - \theta)\sin\theta \cdot \sin\theta\cos\theta = \sin^3\theta + \sin\theta\cos^2\theta = \sin\theta$$

wegen Gleichung (4) und $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. □