Übungsaufgaben 1

Reelle Zahlen

Aufgabe 1. Man beweise, daß die Beziehung

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt! ⑥

Lösung. Der Beweis soll induktiv über $n \in \mathbb{N}$ geführt werden:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ergibt sich tatsächlich

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2}.$$

Induktionsschritt: Unter der Induktionsvoraussetzung, daß die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, ergibt sich durch die Rechnung

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}\end{aligned}$$

in der Tat die Induktionsbehauptung. Damit ist der Induktionsbeweis erbracht. □

Alternative Lösung. Der Beweis kann auf direktem Wege mit Hilfe der Zerlegung

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

in Teilbrüche geführt werden: Eine Indexverschiebung liefert nämlich

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

und somit die gewünschte Formel für jedes $n \in \mathbb{N}$. □

Aufgabe 2. Sei $\mathbb{K}$ ein geordneter Körper und $n \in \mathbb{N}$. Seien ferner *beliebige* Elemente $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ sowie *geordnete* Elemente $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ derart vorgegeben, daß

$$x_k \leq x_\ell \quad \text{für alle } k, \ell \in \{1, \dots, n\} \text{ mit } k \leq \ell$$

gilt. Ist $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ irgendeine bijektive Abbildung, die die Ordnung

$$y_{f(k)} \leq y_{f(\ell)} \quad \text{für alle } k, \ell \in \{1, \dots, n\} \text{ mit } k \leq \ell$$

herstellt, so zeige man, daß dann stets die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \sum_{k=1}^{n} x_k y_{f(k)}$$

erfüllt ist! ⑧

Lösung. Der Beweis wird induktiv über die Anzahl $n \in \mathbb{N}$ geführt:

Induktionsanfang: Im Falle $n = 1$ gilt für alle $x_1, y_1 \in \mathbb{K}$ und die einzige (durch $f(1) = 1$ definierte) bijektive Abbildung $f : \{1\} \to \{1\}$ offensichtlich $x_1 y_1 = x_1 y_{f(1)}$.

Induktionsschritt: 1. Unter der Induktionsvoraussetzung, daß die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, soll die Aussage für $n + 1$ nachgewiesen werden: Seien dazu geordnete Elemente $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{K}$ derart vorgegeben, daß

$$x_k \leq x_\ell \quad \text{für alle } k, \ell \in \{1, \dots, n+1\} \text{ mit } k \leq \ell \tag{1}$$

gilt und $h : \{1, \dots, n+1\} \to \{1, \dots, n+1\}$ eine bijektive Abbildung, die die Ordnung

$$y_{h(k)} \leq y_{h(\ell)} \quad \text{für alle } k, \ell \in \{1, \dots, n+1\} \text{ mit } k \leq \ell \tag{2}$$

unter den beliebig vorgegebenen Elementen $y_1, \dots, y_{n+1} \in \mathbb{K}$ herstellt.

2. Definiert man die bijektive Abbildung $g : \{1, \dots, n+1\} \to \{1, \dots, n+1\}$ durch

$$g(n+1) = h(n+1), \quad g(h(n+1)) = n+1,$$
$$g(k) = k \quad \text{für } k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{h(n+1)\},$$

so soll zuerst gezeigt werden, daß folgende Ungleichung gilt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} x_k y_k \leq \sum_{k=1}^{n+1} x_k y_{g(k)}. \tag{3}$$

Da aufgrund von (1) und (2) sowohl $x_{h(n+1)} \leq x_{n+1}$ als auch $y_{n+1} \leq y_{h(n+1)}$ gelten, ergibt sich $0 \leq (x_{n+1} - x_{h(n+1)})(y_{h(n+1)} - y_{n+1})$ und somit zunächst

$$\begin{aligned} x_{h(n+1)} y_{h(n+1)} + x_{n+1} y_{n+1} &\leq x_{h(n+1)} y_{n+1} + x_{n+1} y_{h(n+1)} \\ &= x_{h(n+1)} y_{g(h(n+1))} + x_{n+1} y_{g(n+1)}. \end{aligned}$$

2.1. Im Falle $h(n+1) \in \{1, \dots, n\}$ gelangt man durch Addition aller fehlenden Terme $x_k y_k = x_k y_{g(k)}$ für $k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{h(n+1)\}$ auf beiden Seiten der letzten Ungleichung zur Abschätzung (3).

2.2. Im Falle $h(n+1) = n+1$ ist g die Identität, woraus die Gleichheit in (3) folgt.

3.1. Die Verkettung $f = g \circ h : \{1, \dots, n+1\} \to \{1, \dots, n+1\}$ von g und h ist eine bijektive Abbildung. Da die bijektive Abbildung g mit ihrer Inversen g^{-1} übereinstimmt, gilt auch $g \circ f = g \circ g \circ h = h$.

3.2. Man definiert die Elemente $z_1, \dots, z_{n+1} \in \mathbb{K}$ durch

$$z_\ell = y_{g(\ell)} \in \mathbb{K} \quad \text{für } \ell \in \{1, \dots, n+1\}$$

und erhält wegen $g \circ f = h$ somit

$$z_{f(k)} = y_{g(f(k))} = y_{h(k)} \quad \text{für alle } k \in \{1, \dots, n+1\}.$$

Wegen (2) stellt die bijektive Abbildung $f : \{1, \dots, n+1\} \to \{1, \dots, n+1\}$ somit die Ordnung

$$z_{f(k)} = y_{h(k)} \leq y_{h(\ell)} = z_{f(\ell)} \quad \text{für alle } k, \ell \in \{1, \dots, n+1\} \text{ mit } k \leq \ell$$

unter den Elementen $z_1, \dots, z_{n+1} \in \mathbb{K}$ her. Da wegen $f(n+1) = n+1$ auch die Einschränkung $f|\{1, \dots, n\} : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ bijektiv ist, gilt nach Induktionsvoraussetzung die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} x_k z_k \leq \sum_{k=1}^{n} x_k z_{f(k)}, \quad \text{also auch} \quad \sum_{k=1}^{n+1} x_k z_k \leq \sum_{k=1}^{n+1} x_k z_{f(k)},$$

woraus sich aufgrund der Ungleichung (3) schließlich die Induktionsbehauptung

$$\sum_{k=1}^{n+1} x_k y_k \leq \sum_{k=1}^{n+1} x_k y_{g(k)} = \sum_{k=1}^{n+1} x_k z_k \leq \sum_{k=1}^{n+1} x_k z_{f(k)} = \sum_{k=1}^{n+1} x_k y_{h(k)}$$

ergibt, womit der Induktionsbeweis erbracht ist. □

Aufgabe 3. Man weise nach, daß in einem Körper $\mathbb{K}$ stets die Identität

$$\prod_{k=1}^{n} x_k - \prod_{k=1}^{n} y_k = \sum_{\ell=1}^{n} \left(\prod_{k=\ell+1}^{n+1} x_k \right) (x_\ell - y_\ell) \left(\prod_{k=0}^{\ell-1} y_k \right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ sowie $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$ gilt, wenn die Voraussetzung $y_0 = x_{n+1} = \mathbb{1}$ erfüllt ist! ⑥

Lösung. Unter den gegebenen Voraussetzungen gilt für die rechte Seite

$$R = \sum_{\ell=1}^{n} \left(\prod_{k=\ell+1}^{n+1} x_k \right) (x_\ell - y_\ell) \left(\prod_{k=0}^{\ell-1} y_k \right)$$

der zu beweisenden Identität die Beziehung

$$\begin{aligned} R &= \sum_{\ell=1}^{n} \left(\prod_{k=\ell+1}^{n+1} x_k \right) x_\ell \left(\prod_{k=0}^{\ell-1} y_k \right) - \sum_{\ell=1}^{n} \left(\prod_{k=\ell+1}^{n+1} x_k \right) y_\ell \left(\prod_{k=0}^{\ell-1} y_k \right) \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} \left(\prod_{k=\ell}^{n+1} x_k \right) \left(\prod_{k=0}^{\ell-1} y_k \right) - \sum_{\ell=1}^{n} \left(\prod_{k=\ell+1}^{n+1} x_k \right) \left(\prod_{k=0}^{\ell} y_k \right). \end{aligned}$$

Durch eine Indexverschiebung in der zweiten Summe ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} R &= \sum_{\ell=1}^{n} \left(\prod_{k=\ell}^{n+1} x_k \right) \left(\prod_{k=0}^{\ell-1} y_k \right) - \sum_{\ell=2}^{n+1} \left(\prod_{k=\ell}^{n+1} x_k \right) \left(\prod_{k=0}^{\ell-1} y_k \right) \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n+1} x_k \right) \left(\prod_{k=0}^{0} y_k \right) - \left(\prod_{k=n+1}^{n+1} x_k \right) \left(\prod_{k=0}^{n} y_k \right) = \prod_{k=1}^{n} x_k - \prod_{k=1}^{n} y_k \end{aligned}$$

aufgrund der Voraussetzung $y_0 = x_{n+1} = \mathbb{1}$. □

Aufgabe 4. Man zeige, daß in einem Körper $\mathbb{K}$ die Lagrange-Identität

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{\ell=1}^{n} y_\ell^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=k+1}^{n} (x_k y_\ell - x_\ell y_k)^2$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ und $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$ gilt!

Lösung. Der Beweis wird durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$ geführt:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt tatsächlich

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{1} x_k^2 \sum_{\ell=1}^{1} y_\ell^2 - \left(\sum_{k=1}^{1} x_k y_k\right)^2 &= x_1^2 y_1^2 - (x_1 y_1)^2 \\ &= \mathbb{0} = \sum_{k=1}^{0} \sum_{\ell=k+1}^{1} (x_k y_\ell - x_\ell y_k)^2.\end{aligned}$$

Induktionsschritt: 1. Elementare Umformungen liefern zunächst

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 \sum_{\ell=1}^{n+1} y_\ell^2 - \left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k y_k\right)^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + x_{n+1}^2\right)\left(\sum_{\ell=1}^{n} y_\ell^2 + y_{n+1}^2\right) \\ &\quad - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k + x_{n+1} y_{n+1}\right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{\ell=1}^{n} y_\ell^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} \left(x_k^2 y_{n+1}^2 + x_{n+1}^2 y_k^2 - 2 x_k y_{n+1} x_{n+1} y_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{\ell=1}^{n} y_\ell^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} (x_k y_{n+1} - x_{n+1} y_k)^2\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in \mathbb{K}$ und $y_1, \ldots, y_n, y_{n+1} \in \mathbb{K}$.

2. Unter der Annahme, daß die Induktionsvoraussetzung

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{\ell=1}^{n} y_\ell^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=k+1}^{n} (x_k y_\ell - x_\ell y_k)^2$$

für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, ergibt sich daraus die Induktionsbehauptung

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 \sum_{\ell=1}^{n+1} y_\ell^2 - \left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k y_k\right)^2 &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=k+1}^{n} (x_k y_\ell - x_\ell y_k)^2 + \sum_{k=1}^{n} (x_k y_{n+1} - x_{n+1} y_k)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=k+1}^{n} (x_k y_\ell - x_\ell y_k)^2 \\
&+ \sum_{k=1}^{n-1} (x_k y_{n+1} - x_{n+1} y_k)^2 + (x_n y_{n+1} - x_{n+1} y_n)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=k+1}^{n+1} (x_k y_\ell - x_\ell y_k)^2 + \sum_{\ell=n+1}^{n+1} (x_n y_\ell - x_\ell y_n)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=k+1}^{n+1} (x_k y_\ell - x_\ell y_k)^2,
\end{aligned}$$

womit der Induktionsbeweis erbracht ist. □

Alternative Lösung. 1. Für alle $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ und $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{\ell=1}^{n} y_\ell^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell y_\ell = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \left(x_k^2 y_\ell^2 - x_k y_k x_\ell y_\ell \right).$$

2. Spaltet man die Doppelsumme auf der rechten Seite in drei Summen über die Indexbereiche $1 \leq k < \ell \leq n$, $1 \leq k = \ell \leq n$, $1 \leq \ell < k \leq n$ auf, dann ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \left(x_k^2 y_\ell^2 - x_k y_k x_\ell y_\ell \right) = & \sum_{1 \leq k < \ell \leq n} \left(x_k^2 y_\ell^2 - x_k y_k x_\ell y_\ell \right) \\ & + \sum_{k=1}^{n} \left(x_k^2 y_k^2 - x_k y_k x_k y_k \right) + \sum_{1 \leq \ell < k \leq n} \left(x_k^2 y_\ell^2 - x_k y_k x_\ell y_\ell \right).\end{aligned}$$

Beachtet man, daß die zweite Summe auf der rechten Seite verschwindet und vertauscht man die Indizes k und ℓ in der dritten Summe, so erhält man

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \left(x_k^2 y_\ell^2 - x_k y_k x_\ell y_\ell \right) &= \sum_{1 \leq k < \ell \leq n} \left(x_k^2 y_\ell^2 - x_k y_k x_\ell y_\ell \right) \\ &\quad + \sum_{1 \leq k < \ell \leq n} \left(x_\ell^2 y_k^2 - x_\ell y_\ell x_k y_k \right) \\ &= \sum_{1 \leq k < \ell \leq n} \left(x_k^2 y_\ell^2 - 2 x_\ell y_\ell x_k y_k + x_\ell^2 y_k^2 \right) \\ &= \sum_{1 \leq k < \ell \leq n} (x_k y_\ell - x_\ell y_k)^2.\end{aligned}$$

Zusammen mit Schritt 1 folgt daraus die Lagrange-Identität. $\square$

Aufgabe 5. Sei für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein offenes Intervall $S_k =]a_k, b_k[$ mit den Grenzen $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ und $a_k < b_k$ gegeben.

1. Man beweise, daß der endliche Durchschnitt $\cap_{k=1}^{n} S_k$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein offenes Intervall oder die leere Menge ist!

2. Man zeige durch Diskussion eines Gegenbeispiels, daß der unendliche Durchschnitt $\cap_{k=1}^{\infty} S_k$ im Allgemeinen weder ein offenes Intervall noch leer ist!

Lösung. 1. Die Aussage wird mit Hilfe vollständiger Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ bewiesen:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist $\cap_{k=1}^{1} S_k = S_1$ ein offenes Intervall.

Induktionsschritt: Unter der Annahme der Induktionsvoraussetzung, daß $\cap_{k=1}^{n} S_k$ ein offenes Intervall oder die leere Menge für ein $n \in \mathbb{N}$ ist, existieren im ersten Falle zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\cap_{k=1}^{n} S_k =]a, b[$. Man erhält somit

$$\begin{aligned} \cap_{k=1}^{n+1} S_k &= \left(\cap_{k=1}^{n} S_k\right) \cap S_{n+1} =]a, b[\cap]a_{n+1}, b_{n+1}[\\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \text{ und } a_{n+1} < x < b_{n+1}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \max\{a, a_{n+1}\} < x < \min\{b, b_{n+1}\}\}. \end{aligned}$$

Bildet man $c = \max\{a, a_{n+1}\} \in \mathbb{R}$ und $d = \min\{b, b_{n+1}\} \in \mathbb{R}$, dann ist $\cap_{k=1}^{n+1} S_k$ im Falle $c < d$ das offene Intervall $]c, d[$ und im Falle $c \geq d$ oder $\cap_{k=1}^{n} S_k = \varnothing$ die leere Menge. Damit ist die Induktionsbehauptung bewiesen und der Induktionsbeweis erbracht.

2. Der Durchschnitt einer unendlichen Familie offener Intervalle ist im Allgemeinen weder ein offenes Intervall noch leer:

Bildet man die offenen Intervalle $S_k = \left]-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right[$ für $k \in \mathbb{N}$, dann erhält man $\cap_{k=1}^{\infty} S_k = \{0\}$: In der Tat gilt $-\frac{1}{k} < 0 < \frac{1}{k}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, also $0 \in \cap_{k=1}^{\infty} S_k$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ existiert ein $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell > \frac{1}{|x|}$ und somit $0 < \frac{1}{\ell} < |x|$. Es gilt also $x \notin S_\ell$ und damit erst recht $x \notin \cap_{k=1}^{\infty} S_k$. □

Aufgabe 6. Man zeige, daß in einem geordneten Körper $\mathbb{K}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{K}$ mit $\mathbb{1} + x \geq \mathbb{0}$ die Bernoulli-Ungleichung $(\mathbb{1} + x)^n \geq \mathbb{1} + nx$ gilt!

Lösung. Der Nachweis der Bernoulli-Ungleichung soll induktiv über $n \in \mathbb{N}$ erfolgen:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ und alle $x \in \mathbb{K}$ gilt $\mathbb{1} + x \geq \mathbb{1} + x$.

Induktionsschritt: Unter der Induktionsvoraussetzung, daß $(\mathbb{1} + x)^n \geq \mathbb{1} + nx$ für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $x + \mathbb{1} \geq \mathbb{0}$ und ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, ergibt sich die Induktionsbehauptung

$$(\mathbb{1}+x)^{n+1} = (\mathbb{1}+x)^n(\mathbb{1}+x) \geq (\mathbb{1}+nx)(\mathbb{1}+x) = \mathbb{1}+(n+1)x+nx^2 \geq \mathbb{1}+(n+1)x$$

wegen $nx^2 \geq \mathbb{0}$, womit der Induktionsbeweis erbracht ist. □

Aufgabe 7. Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Eine bijektive Abbildung $g : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ heißt *Vertauschung*, wenn $k, \ell \in \{1, \dots, n\}$ mit folgender Eigenschaft existieren:

$$g(k) = \ell, \quad g(\ell) = k \quad \text{sowie} \quad g(m) = m \quad \text{für alle } m \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k, \ell\}.$$

Man zeige, daß sich jede bijektive Abbildung $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ als Verkettung $f = f_n \circ \dots \circ f_1$ von n Vertauschungen $f_n, \dots, f_1 : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ darstellen läßt!

Lösung. Der Beweis wird durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$ geführt:

Induktionsanfang: Im Falle $n = 1$ wird durch $f(1) = 1$ die einzige bijektive Abbildung $f : \{1\} \to \{1\}$ definiert, die offenbar auch eine Vertauschung g_1 ist.

Induktionsschritt: Unter der induktiven Voraussetzung, daß sich jede bijektive Abbildung $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ als Verkettung $f = f_n \circ \dots \circ f_1$ von n Vertauschungen $f_n, \dots, f_1 : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ darstellen läßt, soll die entsprechende Induktionsbehauptung für $n + 1$ nachgewiesen werden:

Sei eine bijektive Abbildung $h : \{1, \dots, n+1\} \to \{1, \dots, n+1\}$ beliebig vorgegeben. Man definiert die Vertauschung $g : \{1, \dots, n + 1\} \to \{1, \dots, n + 1\}$ durch

$$g(n + 1) = h(n + 1), \quad g(h(n + 1)) = n + 1,$$
$$g(m) = m \quad \text{für } m \in \{1, \dots, n\} \setminus \{h(n + 1)\}.$$

Da $g \circ h : \{1, \dots, n + 1\} \to \{1, \dots, n + 1\}$ bijektiv ist, muß somit auch die Einschränkung $(g \circ h)|\{1, \dots, n\} : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ bijektiv sein. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es n Vertauschungen $f_n, \dots, f_1 : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ derart, daß

$$(g \circ h)|\{1, \dots, n\} = f_n \circ \dots \circ f_1$$

gilt. Definiert man die Vertauschung $g_k : \{1, \dots, n + 1\} \to \{1, \dots, n + 1\}$ für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ jeweils als Fortsetzung von f_k durch

$$g_k(n + 1) = n + 1 \quad \text{sowie} \quad g_k(m) = f_k(m) \quad \text{für } m \in \{1, \dots, n\},$$

so erhält man die Darstellung

$$g \circ h = g_n \circ \dots \circ g_1.$$

Da wie jede Vertauschung auch g mit ihrer Inversen g^{-1} übereinstimmt, ergibt sich schließlich die gewünschte Darstellung von h als Verkettung

$$h = g \circ g \circ h = g \circ g_n \circ \dots \circ g_1$$

von $n + 1$ Vertauschungen $g, g_n, \dots, g_1 : \{1, \dots, n + 1\} \to \{1, \dots, n + 1\}$, womit die Induktionsbehauptung bewiesen ist. □

Aufgabe 8. Man beweise, daß die Beziehung

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt!

Lösung. Der Beweis soll induktiv über $n \in \mathbb{N}$ geführt werden:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{(1+1)(2+1)}{6}.$$

Induktionsschritt: Unter der Induktionsvoraussetzung, daß die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, ergibt sich durch die Rechnung

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} \end{aligned}$$

in der Tat die Induktionsbehauptung. Damit ist der Induktionsbeweis erbracht. □

Aufgabe 9. Man zeige, daß in einem Körper $\mathbb{K}$ die Formel

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{\mathbb{1} - x^{n+1}}{\mathbb{1} - x} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{K} \setminus \{\mathbb{1}\} \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

für die geometrische Summe gilt!

Lösung. Sei $x \in \mathbb{K}$ ein beliebiges Element. Dann erhält man durch Indexverschiebung

$$(\mathbb{1} - x)\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=1}^{n+1} x^k = \mathbb{1} - x^{n+1}$$

wegen $x^0 = \mathbb{1}$. Da im Falle $x \neq \mathbb{1}$ stets $\mathbb{1} - x \neq \mathbb{0}$ gilt, folgt daraus durch Multiplikation mit $(\mathbb{1} - x)^{-1} \in \mathbb{K}$ die Formel für die geometrische Summe. □

Aufgabe 10. Man zeige, daß die Binomialkoeffizienten die Beziehungen

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{für alle } k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ mit } k \leq n$$

sowie

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \quad \text{für alle } k, n \in \mathbb{N} \text{ mit } k \leq n$$

erfüllen und schließe daraus, daß außerdem auch

$$\sum_{m=0}^{k} \binom{n+m}{m} = \binom{n+k+1}{k} \quad \text{für alle } k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

gilt!

Lösung. 1. In der Tat gelten die Beziehungen

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$$

für alle $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $k \leq n$ sowie

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \\
&= \left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k}\right) \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \\
&= \frac{n+1}{k(n-k+1)} \, \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$.

2. Der Beweis der dritten Beziehung wird für ein beliebiges $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ durch Induktion über $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ geführt:

Induktionsanfang: Im Falle $k = 0$ gilt in der Tat $\sum_{m=0}^{0} \binom{n+m}{m} = \binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$.

Induktionsschritt: Unter der Annahme der Induktionsvoraussetzung, daß

$$\sum_{m=0}^{k} \binom{n+m}{m} = \binom{n+k+1}{k}$$

für ein $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt, ergibt sich die Induktionsbehauptung

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{k+1} \binom{n+m}{m} &= \sum_{m=0}^{k} \binom{n+m}{m} + \binom{n+k+1}{k+1} \\
&= \binom{n+k+1}{k} + \binom{n+k+1}{k+1} = \binom{n+k+2}{k+1}
\end{aligned}$$

aufgrund der zweiten Beziehung für Binomialkoeffizienten. □

Aufgabe 11. Man beweise, daß in einem Körper $\mathbb{K}$ die binomische Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N} \text{ und alle } a, b \in \mathbb{K} \text{ gilt!}$$

Lösung. Der Nachweis der binomischen Formel wird induktiv über $n \in \mathbb{N}$ geführt:

Induktionsanfang: Da für alle $a \in \mathbb{K}$ stets $a^0 = \mathbb{1}$ gilt, ergibt sich für $n = 1$ offenbar

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{1}{0} a^0 b + \binom{1}{1} a b^0 = a + b.$$

Induktionsschritt: Unter der Annahme der Induktionsvoraussetzung, daß die binomische Formel für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist die Gültigkeit der entsprechenden Aussage für $n+1$ zu beweisen. Aus $(a+b)^{n+1} = a(a+b)^n + b(a+b)^n$ folgt unter Benutzung der Induktionsvoraussetzung durch Indexverschiebung

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \binom{n}{n} a^{n+1} + \binom{n}{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n-k+1}.
\end{aligned}$$

Somit liefert die Formel $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ schließlich die Induktionsbehauptung

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k},
\end{aligned}$$

womit der Induktionsbeweis erbracht ist. $\square$