Übungsaufgaben 10

Stammfunktionen reeller Funktionen

Aufgabe 1. Man berechne für alle $k, m \in \mathbb{N}$ die Integrale

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \cos mx \, dx, \qquad \int_0^{2\pi} \cos kx \sin mx \, dx, \qquad \int_0^{2\pi} \sin kx \sin mx \, dx$$

mit Hilfe der Additionstheoreme! ⑥

Lösung. 1. Seien $\ell \in \mathbb{Z}$ und $c, s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $c(x) = \cos \ell x$ sowie $s(x) = \sin \ell x$ für $x \in \mathbb{R}$ definiert. Dann gilt $Dc(x) = -\ell \sin \ell x$ sowie $Ds(x) = \ell \cos \ell x$ und somit

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos \ell x \, dx &= \frac{\sin 2\pi\ell}{\ell} - \frac{\sin 0}{\ell} = 0 && \text{für alle } \ell \in \mathbb{Z}, \ell \neq 0, \\
\int_0^{2\pi} \cos \ell x \, dx &= \int_0^{2\pi} 1 \, dx = 2\pi && \text{für } \ell = 0, \\
\int_0^{2\pi} \sin \ell x \, dx &= -\frac{\cos 2\pi\ell}{\ell} + \frac{\cos 0}{\ell} = 0 && \text{für alle } \ell \in \mathbb{Z}, \ell \neq 0, \\
\int_0^{2\pi} \sin \ell x \, dx &= \int_0^{2\pi} 0 \, dx = 0 && \text{für } \ell = 0.
\end{aligned}$$

2. Für alle $k, m \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gelten die Additionstheoreme

$$\begin{aligned}
2 \cos kx \cos mx &= \cos(k+m)x + \cos(k-m)x, \\
2 \cos kx \sin mx &= \sin(k+m)x - \sin(k-m)x, \\
-2 \sin kx \sin mx &= \cos(k+m)x - \cos(k-m)x,
\end{aligned}$$

woraus sich mit Schritt 1 die gesuchten Integrale

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos kx \cos mx \, dx &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(k+m)x + \cos(k-m)x}{2} \, dx = \begin{cases} \pi & \text{für } k = m, \\ 0 & \text{für } k \neq m, \end{cases} \\
\int_0^{2\pi} \cos kx \sin mx \, dx &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin(k+m)x - \sin(k-m)x}{2} \, dx = 0, \\
\int_0^{2\pi} \sin kx \sin mx \, dx &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(k-m)x - \cos(k+m)x}{2} \, dx = \begin{cases} \pi & \text{für } k = m, \\ 0 & \text{für } k \neq m, \end{cases}
\end{aligned}$$

für alle $k, m \in \mathbb{N}$ ergeben. □

Aufgabe 2. Sei eine Längeneinheit $\delta > 0$ sowie die Funktion $\rho :]0, \pi[\to \mathbb{R}$ durch

$$\rho(t) = -\frac{\delta \cos 2t}{\sin t} \quad \text{für } t \in]0, \pi[\text{ gegeben.}$$

Sei ferner die *Strophoide* durch die Funktion $s :]0, \pi[\to \mathbb{C}$ in Polarkoordinaten

$$s(t) = \rho(t)(\cos t, \sin t) \quad \text{für } t \in]0, \pi[$$

sowie ein beliebiger Punkt $\tau \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ vorgegeben.

1. Man zeige, daß die Punkte $s(\tau)$, $s\left(\frac{\pi}{2}\right)$ und $s\left(\tau + \frac{\pi}{2}\right)$ auf einer Strecke liegen und

$$\left|s(\tau) - s\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right| \cdot \left|s\left(\tau + \tfrac{\pi}{2}\right) - s\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right| = \delta^2 \quad \text{gilt!}$$

2. Man beweise, daß der Punkt $\frac{1}{2}\left(s(\tau) + s\left(\tau + \frac{\pi}{2}\right)\right)$ auf der reellen Achse liegt und

$$\tfrac{1}{2}\left|s(\tau) + s\left(\tau + \tfrac{\pi}{2}\right)\right| = \tfrac{1}{2}\left|s(\tau) - s\left(\tau + \tfrac{\pi}{2}\right)\right| \quad \text{gilt!}$$

3. Man berechne den Flächeninhalt jener Teilmenge der Ebene, welche von der Schleife $\left\{s(t) \in \mathbb{C} \mid t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]\right\}$ der Strophoide umschlungen wird!

4. Man bestimme den Flächeninhalt derjenigen Teilmenge der Ebene, welche von den Bögen $\left\{s(t) \in \mathbb{C} \mid t \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right]\right\}$ und $\left\{s(t) \in \mathbb{C} \mid t \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right[\right\}$ sowie der Asymptote der Strophoide eingeschlossen wird! ⑧

Lösung. 1. Aufgrund der Additionstheoreme ergeben sich zunächst die Beziehungen

$$s(\tau) = -\delta \cos 2\tau \cdot (\cot \tau, 1), \quad s\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = (0, \delta), \quad s\left(\tau + \tfrac{\pi}{2}\right) = \delta \cos 2\tau \cdot (-\tan \tau, 1).$$

2.1. Daraus folgt sowohl

$$\begin{aligned} s(\tau) - s\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= -\delta \cdot (\cos 2\tau \cot \tau, \cos 2\tau + 1) = -\delta \cdot (\cos 2\tau \cot \tau, 2\cos^2 \tau) \\ &= -\delta \cot \tau \cdot (\cos 2\tau, 2 \sin \tau \cos \tau) = -\delta \cot \tau \cdot (\cos 2\tau, \sin 2\tau) \end{aligned}$$

als auch

$$\begin{aligned} s\left(\tau + \tfrac{\pi}{2}\right) - s\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= \delta \cdot (-\cos 2\tau \tan \tau, \cos 2\tau - 1) = -\delta \cdot (\cos 2\tau \tan \tau, 2\sin^2 \tau) \\ &= -\delta \tan \tau \cdot (\cos 2\tau, 2 \sin \tau \cos \tau) = -\delta \tan \tau \cdot (\cos 2\tau, \sin 2\tau). \end{aligned}$$

Somit liegen die Kurvenpunkte $s(\tau)$, $s\left(\frac{\pi}{2}\right)$ und $s\left(\tau + \frac{\pi}{2}\right)$ auf einer Strecke, und es gilt

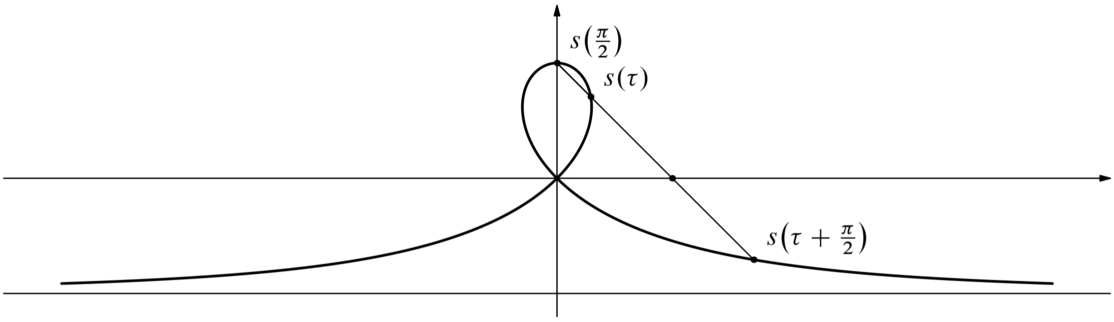
$$\left|s(\tau) - s\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right| \cdot \left|s\left(\tau + \tfrac{\pi}{2}\right) - s\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right| = \delta^2.$$

2.2. Außerdem erhält man aus Schritt 1 und den Additionstheoremen auch

$$\begin{aligned} \frac{s(\tau) + s\left(\tau + \frac{\pi}{2}\right)}{2} &= -\frac{\delta \cos 2\tau}{2} \cdot \left(\frac{\cos \tau}{\sin \tau} + \frac{\sin \tau}{\cos \tau}, 0\right) = -\delta \cot 2\tau \cdot (1, 0), \\ \frac{s(\tau) - s\left(\tau + \frac{\pi}{2}\right)}{2} &= -\frac{\delta \cos 2\tau}{2} \cdot \left(\frac{\cos \tau}{\sin \tau} - \frac{\sin \tau}{\cos \tau}, 2\right) = -\delta \cot 2\tau \cdot (\cos 2\tau, \sin 2\tau). \end{aligned}$$

Somit liegt der Mittelpunkt $\frac{1}{2}\left(s(\tau) + s\left(\tau + \frac{\pi}{2}\right)\right)$ auf der reellen Achse, und es gilt

$$\tfrac{1}{2}\left|s(\tau) + s\left(\tau + \tfrac{\pi}{2}\right)\right| = \tfrac{1}{2}\left|s(\tau) - s\left(\tau + \tfrac{\pi}{2}\right)\right|.$$



3. Jene Fläche, welche von der Schleife $\{s(t) \in \mathbb{C} \mid t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]\}$ der Strophoide umschlungen wird, hat gemäß der Leibniz-Sektorformel den Inhalt

$$F_S = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\rho^2(t)\,dt}{2} = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\delta^2 \cos^2 2t\,dt}{2\sin^2 t}\,.$$

Wegen $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$ ergibt sich der Flächeninhalt

$$F_S = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\delta^2 dt}{2\sin^2 t} - \int_{\pi/4}^{3\pi/4} 2\delta^2 dt + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \delta^2(1 - \cos 2t)\,dt$$

der Schleife der Strophoide als Summe dreier Grundintegrale

$$F_S = \frac{\delta^2\big(\cot\frac{\pi}{4} - \cot\frac{3\pi}{4}\big)}{2} - \frac{\delta^2(3\pi - \pi)}{4} - \frac{\delta^2\big(\sin\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\big)}{2} = 2\delta^2 - \frac{\pi\delta^2}{2}\,.$$

4. Seien neben dem Nullpunkt $\mathbb{0} \in \mathbb{C}$ durch $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ sowie $\beta \in \left]\frac{3\pi}{4}, \pi\right[$ zwei weitere Eckpunkte $(-\delta\cot\alpha, -\delta) \in \mathbb{C}$ und $(-\delta\cot\beta, -\delta) \in \mathbb{C}$ eines Dreiecks auf der Asymptote der Strophoide vorgegeben. Gemäß der Leibniz-Sektorformel wird aus diesem Dreieck durch die Bögen $\{s(t) \in \mathbb{C} \mid t \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right]\}$ und $\{s(t) \in \mathbb{C} \mid t \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right[\}$ der Strophoide eine Fläche mit dem Inhalt

$$F_A(\alpha,\beta) = \frac{\delta^2(\cot\alpha - \cot\beta)}{2} - \int_{\alpha}^{\pi/4} \frac{\rho^2(t)\,dt}{2} - \int_{3\pi/4}^{\beta} \frac{\rho^2(t)\,dt}{2}$$

herausgeschnitten. Wie zuvor erhält man durch Berechnung von Grundintegralen

$$\begin{aligned} F_A(\alpha,\beta) &= \frac{\delta^2(\cot\alpha - \cot\beta)}{2} - \frac{\delta^2\big(\cot\alpha - \cot\frac{\pi}{4}\big)}{2} + \frac{\pi\delta^2}{4} - \alpha\delta^2 + \frac{\delta^2\big(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 2\alpha\big)}{2} \\ &\quad - \frac{\delta^2\big(\cot\frac{3\pi}{4} - \cot\beta\big)}{2} + \beta\delta^2 - \frac{3\pi\delta^2}{4} + \frac{\delta^2\big(\sin 2\beta - \sin\frac{3\pi}{2}\big)}{2} \\ &= 2\delta^2 + \frac{\delta^2(\sin 2\beta - \sin 2\alpha)}{2} + (\beta - \alpha)\delta^2 - \frac{\pi\delta^2}{2}\,. \end{aligned}$$

Die Grenzprozesse $\alpha \downarrow 0$ und $\beta \uparrow \pi$ liefern schließlich den Flächeninhalt

$$\lim_{\beta\uparrow\pi}\lim_{\alpha\downarrow 0} F_A(\alpha,\beta) = 2\delta^2 + \frac{\pi\delta^2}{2}$$

jener Teilmenge, welche von der Asymptote und den Bögen $\{s(t) \in \mathbb{C} \mid t \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right]\}$ und $\{s(t) \in \mathbb{C} \mid t \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right[\}$ der Strophoide eingeschlossen wird. $\square$

Aufgabe 3. Sei die gebrochene rationale Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) = \frac{2x^2 + 4}{((x-1)^2 + 1)((x+1)^2 + 1)} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ gegeben.}$$

Man berechne das Integral $\int_a^b g(x)\,dx$ für beliebige Intervallgrenzen $a, b \in \mathbb{R}$ durch eine Zerlegung von g in Teilbrüche und deren anschließende Integration! ⑥

Lösung. 1. Im Teilbruchansatz

$$\frac{2x^2 + 4}{((x-1)^2 + 1)((x+1)^2 + 1)} = \frac{a_1 x + a_0}{(x-1)^2 + 1} + \frac{b_1 x + b_0}{(x+1)^2 + 1}$$

müssen aufgrund der reellen Nullstellenfreiheit der quadratischen Nenner vier unbekannte Koeffizienten $a_1, a_0, b_1, b_0 \in \mathbb{R}$ bestimmt werden: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4 &= (a_1 x + a_0)((x+1)^2 + 1) + (b_1 x + b_0)((x-1)^2 + 1) \\ &= \big(a_1 x^3 + 2a_1 x^2 + 2a_1 x + a_0 x^2 + 2a_0 x + 2a_0\big) \\ &\quad + \big(b_1 x^3 - 2b_1 x^2 + 2b_1 x + b_0 x^2 - 2b_0 x + 2b_0\big), \end{aligned}$$

woraus sich durch Koeffizientenvergleich vor Termen gleicher Ordnung in x das lineare Gleichungssystem mit vier Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= a_1 + b_1 \\ 2 &= 2a_1 + a_0 - 2b_1 + b_0 \\ 0 &= 2a_1 + 2a_0 + 2b_1 - 2b_0 \\ 4 &= 2a_0 + 2b_0 \end{aligned}$$

für die vier Unbekannten $a_1, a_0, b_1, b_0 \in \mathbb{R}$ ergibt. Subtrahiert man das Doppelte der ersten von der dritten Gleichung, dann erhält man $2a_0 - 2b_0 = 0$. Mit der vierten Gleichung $2a_0 + 2b_0 = 4$ folgt daraus $a_0 = b_0 = 1$. Setzt man dies in die zweite Gleichung ein, so bekommt man $a_1 - b_1 = 0$. Die erste Gleichung $a_1 + b_1 = 0$ liefert somit $a_1 = b_1 = 0$. Das führt auf die Teilbruchzerlegung

$$g(x) = \frac{2x^2 + 4}{((x-1)^2 + 1)((x+1)^2 + 1)} = \frac{1}{(x-1)^2 + 1} + \frac{1}{(x+1)^2 + 1} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

2. Mit Hilfe des Grundintegrals

$$\int_a^b \frac{dx}{(x - x_0)^2 + 1} = \arctan(b - x_0) - \arctan(a - x_0) \quad \text{für } x_0 \in \mathbb{R}$$

ergibt sich schließlich

$$\int_a^b g(x)\,dx = \arctan(b-1) - \arctan(a-1) + \arctan(b+1) - \arctan(a+1)$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$. □

Aufgabe 4. Seien eine Folge (g_n) von Treppenfunktionen $g_n : [-1, 0] \to \mathbb{R}$ durch

$$g_n(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} & \text{für } \xi \in \left[-\frac{1}{k}, -\frac{1}{k+1}\right[\text{ und } k \in \{1, \dots, n\}, \\ 0 & \text{für } \xi \in \left[-\frac{1}{n+1}, 0\right], \end{cases}$$

sowie eine Folge (f_n) von Stammfunktionen $f_n : [-1, 0] \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ durch

$$f_n(x) = \int_{-1}^{x} g_n(\xi)\, d\xi \quad \text{für alle } x \in [-1, 0] \text{ definiert.}$$

1. Man zeige, daß die Funktionenfolge (g_n) gleichmäßig gegen eine (regulierte) Grenzfunktion $g : [-1, 0] \to \mathbb{R}$ konvergiert und bestimme diese Grenzfunktion!

2. Man weise nach, daß die Funktionenfolge (f_n) gleichmäßig gegen eine Stammfunktion $f : [-1, 0] \to \mathbb{R}$ von g konvergiert und berechne diese Stammfunktion!

Lösung. 1. Definiert man die Funktion $g : [-1, 0] \to \mathbb{R}$ durch

$$g(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} & \text{für } \xi \in \left[-\frac{1}{k}, -\frac{1}{k+1}\right[\text{ und } k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{für } \xi = 0, \end{cases}$$

dann erhält man für jedes $n \in \mathbb{N}$ als Differenz

$$g(\xi) - g_n(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{für } \xi \in \left[-1, -\frac{1}{n+1}\right[, \\ \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} & \text{für } \xi \in \left[-\frac{1}{k}, -\frac{1}{k+1}\right[\text{ und } k \in \mathbb{N}, k \geq n+1, \\ 0 & \text{für } \xi = 0. \end{cases}$$

Daraus ergibt sich

$$|g(\xi) - g_n(\xi)| \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } \xi \in [-1, 0],$$

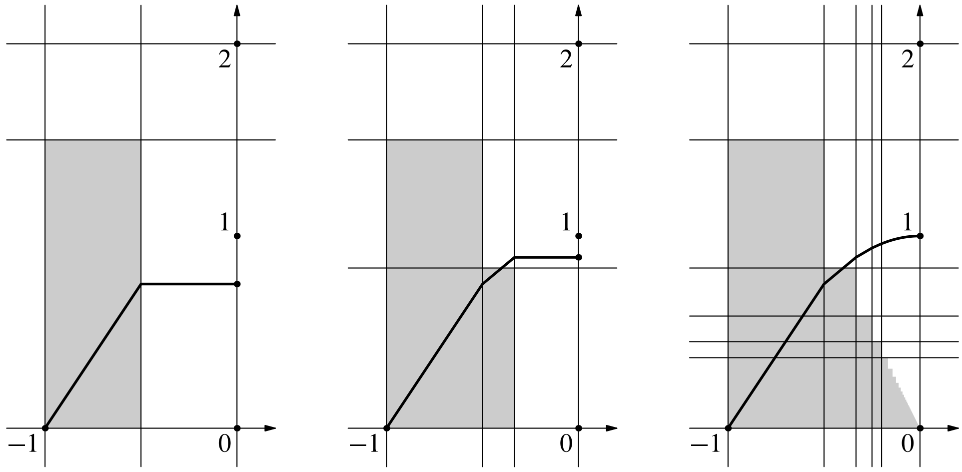
woraus die gleichmäßige Konvergenz der Folge (g_n) von Treppenfunktionen gegen die Grenzfunktion $g : [-1, 0] \to \mathbb{R}$ folgt, die somit reguliert ist.

2. Sei die Folge (x_k) von Punkten aus $[-1, 0]$ durch $x_k = -\frac{1}{k}$ für $k \in \mathbb{N}$ definiert und $n \in \mathbb{N}$ beliebig vorgegeben. Die durch

$$f_n(x) = \int_{-1}^{x} g_n(\xi)\, d\xi \quad \text{für alle } x \in [-1, 0]$$

definierte Stammfunktion $f_n : [-1, 0] \to \mathbb{R}$ von $g_n : [-1, 0] \to \mathbb{R}$ ist als stückweise lineare Funktion auf jedem der Teilintervalle $[x_1, x_2], \dots, [x_n, x_{n+1}]$, $[x_{n+1}, 0]$ linear. Für jedes $k \in \{1, \dots, n+1\}$ erhält man die Funktionswerte

$$\begin{aligned} f_n(x_k) &= \int_{-1}^{x_k} g_n(\xi)\, d\xi = \sum_{\ell=1}^{k-1} \int_{x_\ell}^{x_{\ell+1}} g_n(\xi)\, d\xi = \sum_{\ell=1}^{k-1} g_n(x_\ell)(x_{\ell+1} - x_\ell) \\ &= \sum_{\ell=1}^{k-1} \left(\frac{1}{\ell} + \frac{1}{\ell+1}\right)\left(\frac{1}{\ell} - \frac{1}{\ell+1}\right) = \sum_{\ell=1}^{k-1} \frac{1}{\ell^2} - \sum_{\ell=1}^{k-1} \frac{1}{(\ell+1)^2} = 1 - \frac{1}{k^2}\,. \end{aligned}$$



Mit diesen Werten ergibt sich aus der allgemeinen Darstellung

$$f_n(x) = \begin{cases} f_n(x_k) + g_n(x_k)(x - x_k) & \text{für } x \in [x_k, x_{k+1}] \text{ und } k \in \{1, \ldots, n\}, \\ f_n(x_{n+1}) + g_n(x_{n+1})(x - x_{n+1}) & \text{für } x \in [x_{n+1}, 0], \end{cases}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ die konkrete Darstellung

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{k^2} + g(x_k)(x - x_k) & \text{für } x \in [x_k, x_{k+1}] \text{ und } k \in \{1, \ldots, n\}, \\ 1 - \frac{1}{(n+1)^2} & \text{für } x \in [x_{n+1}, 0]. \end{cases}$$

Somit konvergiert die Funktionenfolge (f_n) punktweise gegen die durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{k^2} + g(x_k)(x - x_k) & \text{für } x \in [x_k, x_{k+1}] \text{ und } k \in \mathbb{N}, \\ 1 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

gegebene Grenzfunktion $f : [-1, 0] \to \mathbb{R}$.

3. Da sich für alle $x \in [x_k, x_{k+1}]$ und $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n + 1$ die Differenz

$$\begin{aligned} 0 \leq f(x) - f_n(x) &= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{k^2} + g(x_k)(x - x_k) \\ &\leq \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{k^2} + g(x_k)(x_{k+1} - x_k) \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{k^2} + \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \end{aligned}$$

abschätzen läßt, ergibt sich

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)^2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } x \in [-1, 0],$$

woraus die gleichmäßige Konvergenz der Folge (f_n) stetiger Funktionen gegen die stetige Grenzfunktion $f : [-1, 0] \to \mathbb{R}$ folgt. Da außerdem $Df(x) = g(x)$ für jedes $x \in \,]x_k, x_{k+1}[$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt, ist f eine Stammfunktion von g. □

Aufgabe 5. Seien eine Längeneinheit $\delta > 0$, zwei Brennpunkte $z_\oplus = (\delta, 0) \in \mathbb{C}$ und $z_\ominus = (-\delta, 0) \in \mathbb{C}$ sowie die *Lemniskate* durch die Funktion $s : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mittels

$$s(t) = \left(\frac{\delta\sqrt{2}\sin t}{1+\cos^2 t}, -\frac{\delta\sqrt{2}\sin t\cos t}{1+\cos^2 t} \right) \quad \text{für } t \in [0, 2\pi] \text{ vorgegeben.}$$

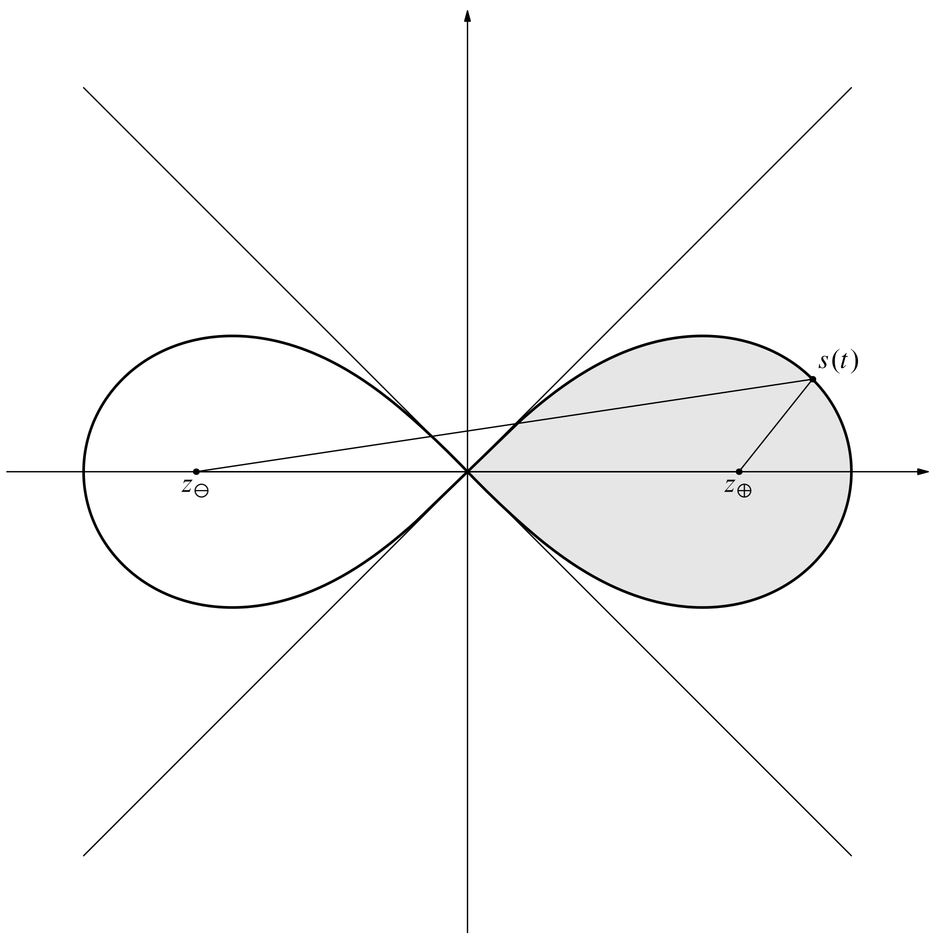
1. Man weise nach, daß $|s(t) - z_\oplus| \cdot |s(t) - z_\ominus| = \delta^2$ für alle $t \in [0, 2\pi]$ gilt!

2. Man finde eine Parametertransformation $\varphi : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \to [0, \pi]$, welche eine Darstellung $\rho : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \to [0, \infty[$ in Polarkoordinaten

$$s(\varphi(\tau)) = \rho(\tau)(\cos\tau, \sin\tau) \quad \text{für alle } \tau \in \left[-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4}\right]$$

der rechten Schleife der Lemniskate liefert!

3. Man berechne den Flächeninhalt jener Teilmenge der Ebene, welche von der rechten Schleife $\{s(t) \in \mathbb{C} \mid t \in [0, \pi]\}$ der Lemniskate umschlungen wird!



Lösung. 1. Für jedes $t \in [0, 2\pi]$ erhält man

$$\frac{|s(t) - z_\oplus|^2}{\delta^2} = \left(\frac{\sqrt{2}\sin t}{1+\cos^2 t} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}\sin t\cos t}{1+\cos^2 t}\right)^2 = \frac{2\sin^2 t - 2\sqrt{2}\sin t}{1+\cos^2 t} + 1\,,$$

$$\frac{|s(t) - z_\ominus|^2}{\delta^2} = \left(\frac{\sqrt{2}\sin t}{1+\cos^2 t} + 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}\sin t\cos t}{1+\cos^2 t}\right)^2 = \frac{2\sin^2 t + 2\sqrt{2}\sin t}{1+\cos^2 t} + 1$$

und somit wegen $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ schließlich das Produkt

$$\begin{aligned}\frac{|s(t) - z_\ominus|^2 \cdot |s(t) - z_\oplus|^2}{\delta^4} &= \left(\frac{2\sin^2 t + 2\sqrt{2}\sin t}{1+\cos^2 t} + 1\right)\left(\frac{2\sin^2 t - 2\sqrt{2}\sin t}{1+\cos^2 t} + 1\right) \\ &= \left(\frac{2\sin^2 t}{1+\cos^2 t} + 1\right)^2 - \frac{8\sin^2 t}{(1+\cos^2 t)^2} \\ &= \frac{4(1-\cos^2 t)\sin^2 t - 8\sin^2 t}{(1+\cos^2 t)^2} + \frac{4\sin^2 t}{1+\cos^2 t} + 1 = 1.\end{aligned}$$

2. Die Parametertransformation $\varphi : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \to [0, \pi]$ und die gesuchte Darstellung $\rho : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \to [0, \infty[$ müssen die Bedingung

$$\rho(\tau)(\cos\tau, \sin\tau) = \left(\frac{\delta\sqrt{2}\sin\varphi(\tau)}{1+\cos^2\varphi(\tau)}, -\frac{\delta\sqrt{2}\sin\varphi(\tau)\cos\varphi(\tau)}{1+\cos^2\varphi(\tau)}\right) \tag{1}$$

für jedes $\tau \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ erfüllen. Betrachtet man das Verhältnis von Imaginär- und Realteil, so folgt daraus für alle $\tau \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ wegen $\rho(\tau) > 0$ die Beziehung

$$\tan\tau = \frac{\rho(\tau)\sin\tau}{\rho(\tau)\cos\tau} = -\frac{\sin\varphi(\tau)\cos\varphi(\tau)}{\sin\varphi(\tau)} = -\cos\varphi(\tau)$$

und somit

$$\cos\varphi(\tau) = -\tan\tau \quad \text{sowie} \quad \sin\varphi(\tau) = \sqrt{1-\tan^2\tau} \quad \text{für jedes } \tau \in \left[-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4}\right].$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung (1) ein, so ergibt sich aus $\cos^2\tau + \sin^2\tau = 1$ und $\cos 2\tau = \cos^2\tau - \sin^2\tau = (1-\tan^2\tau)\cos^2\tau$ die gesuchte Darstellung

$$\begin{aligned}\rho(\tau)(\cos\tau, \sin\tau) &= \frac{\delta\sqrt{2(1-\tan^2\tau)}}{1+\tan^2\tau} \cdot (1, \tan\tau) \\ &= \frac{\delta\sqrt{2(1-\tan^2\tau)}}{1+\tan^2\tau} \cdot \frac{\cos^2\tau}{\cos^2\tau} \cdot (1, \tan\tau) = \delta\sqrt{2\cos 2\tau} \cdot (\cos\tau, \sin\tau)\end{aligned}$$

der Lemniskate in Polarkoordinaten $\tau \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

3. Diejenige Fläche, welche von der rechten Schleife $\left\{\sigma(\tau) \in \mathbb{C} \mid \tau \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]\right\}$ der Lemniskate umschlungen wird, hat somit den Inhalt

$$F(\delta) = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\rho^2(\tau)\,d\tau}{2} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \delta^2\cos 2\tau\,d\tau = \frac{\delta^2\sin\frac{\pi}{2} - \delta^2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2} = \delta^2$$

gemäß der Leibniz-Sektorformel. □

Aufgabe 6. Sei $X = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ der Definitionsbereich der durch

$$g(x) = \frac{4}{(x-1)^2(x+1)^2} \quad \text{für } x \in X$$

definierten gebrochenen rationalen Funktion $g : X \to \mathbb{R}$. Für beliebige Intervallgrenzen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $[a,b] \subset X$ berechne man das Integral $\int_a^b g(x)\,dx$ durch eine Zerlegung von g in Teilbrüche und deren anschließende Integration!

Lösung. 1. Im Teilbruchansatz

$$\frac{4}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{a_0}{x-1} + \frac{a_1}{(x-1)^2} + \frac{b_0}{x+1} + \frac{b_1}{(x+1)^2}$$

werden vier unbekannte Koeffizienten $a_1, a_0, b_1, b_0 \in \mathbb{R}$ bestimmt: Für $x \in X$ gilt

$$\begin{aligned} 4 &= a_0(x-1)(x+1)^2 + a_1(x+1)^2 + b_0(x+1)(x-1)^2 + b_1(x-1)^2 \\ &= a_0\big(x^3 + x^2 - x - 1\big) + a_1\big(x^2 + 2x + 1\big) \\ &+ b_0\big(x^3 - x^2 - x + 1\big) + b_1\big(x^2 - 2x + 1\big), \end{aligned}$$

woraus sich durch Koeffizientenvergleich vor Termen gleicher Ordnung in x das lineare Gleichungssystem mit vier Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 + b_0 \\ 0 &= a_0 + a_1 - b_0 + b_1 \\ 0 &= 2a_1 - a_0 - b_0 - 2b_1 \\ 4 &= a_1 - a_0 + b_0 + b_1 \end{aligned}$$

für die vier Unbekannten $a_1, a_0, b_1, b_0 \in \mathbb{R}$ ergibt. Addiert man die erste zur dritten Gleichung, dann erhält man $2a_1 - 2b_1 = 0$. Addiert man die zweite zur vierten Gleichung, so ergibt sich $2a_1 + 2b_1 = 4$. Zusammen mit $2a_1 - 2b_1 = 0$ folgt daraus $a_1 = b_1 = 1$. In die vierte Gleichung eingesetzt, bekommt man $b_0 - a_0 = 2$. Die erste Gleichung $a_0 + b_0 = 0$ liefert somit $a_0 = -1$ und $b_0 = 1$. Das führt auf die Teilbruchzerlegung

$$g(x) = \frac{4}{(x-1)^2(x+1)^2} = -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \quad \text{für } x \in X.$$

2. Mit Hilfe der Grundintegrale

$$\int_a^b \frac{dx}{x \pm 1} = \ln|b \pm 1| - \ln|a \pm 1| \quad \text{und} \quad \int_a^b \frac{dx}{(x \pm 1)^2} = -\frac{1}{b \pm 1} + \frac{1}{a \pm 1}$$

ergibt sich schließlich

$$\int_a^b g(x)\,dx = \ln\left|\frac{b+1}{b-1}\right| - \ln\left|\frac{a+1}{a-1}\right| - \frac{1}{b+1} - \frac{1}{b-1} + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1}$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $[a,b] \subset X$. □