Übungsaufgaben 11

Integration reeller Funktionen

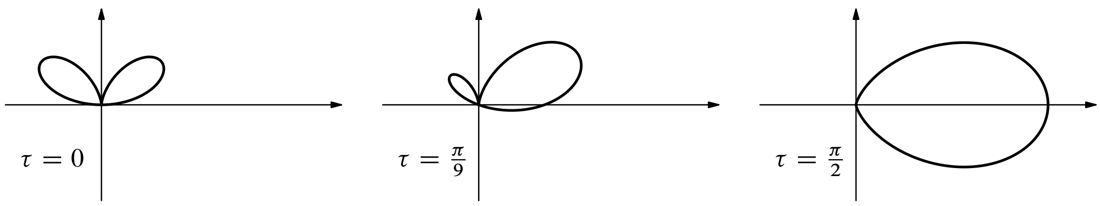
Aufgabe 1. Seien eine Längeneinheit $d > 0$ und ein Formparameter $\tau \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sowie das *Bifolium* durch die Funktion $s : [-\tau, \pi - \tau] \to \mathbb{C}$ in Polarkoordinaten

$$s(t) = d \sin(t + \tau) \cos^2 t \cdot (\cos t, \sin t) \quad \text{für } t \in [-\tau, \pi - \tau] \text{ vorgegeben.}$$

Man zeige, daß jene Fläche, welche vom ganzen Bifolium $\{s(t) \in \mathbb{C} \mid t \in [-\tau, \pi - \tau]\}$ umschlungen wird, den Inhalt

$$\int_{-\tau}^{\pi-\tau} \frac{|s(t)|^2 dt}{2} = \frac{(1 + 4\sin^2\tau)\,\pi d^2}{32}$$

besitzt, indem man (in geeigneter Weise mehrmals) teilweise integriert! ⑥



Lösung. 1. Während der gesamten Rechnung wird stets von den Beziehungen

$$\sin(-\tau) = -\sin\tau, \quad \sin(\pi - \tau) = \sin\tau, \quad \cos(-\tau) = \cos\tau, \quad \cos(\pi - \tau) = -\cos\tau$$

Gebrauch gemacht. Durch das Additionstheorem $\sin(t + \tau) = \sin t \cos\tau + \cos t \sin\tau$ wird das gesuchte Integral

$$\int_{-\tau}^{\pi-\tau} \frac{|s(t)|^2 dt}{2} = \frac{d^2 \sin^2\tau}{2} \int_{-\tau}^{\pi-\tau} \cos^6 t\, dt + d^2 \sin\tau\cos\tau \int_{-\tau}^{\pi-\tau} \sin t \cos^5 t\, dt$$
$$+ \frac{d^2\cos^2\tau}{2} \int_{-\tau}^{\pi-\tau} \sin^2 t \cos^4 t\, dt$$

auf drei Integrale über Produkte trigonometrischer Funktionen zurückgeführt:

2.1. Durch teilweise Integration

$$\int_{-\tau}^{\pi-\tau} \cos t \cdot \cos^5 t\, dt = \sin(\pi - \tau)\cos^5(\pi - \tau) - \sin(-\tau)\cos^5(-\tau)$$
$$+ \int_{-\tau}^{\pi-\tau} \sin t \cdot 5 \sin t \cos^4 t\, dt$$

wird das erste Integral

$$\int_{-\tau}^{\pi-\tau} \cos^6 t\, dt = 5 \int_{-\tau}^{\pi-\tau} \sin^2 t \cos^4 t\, dt$$

in ein Vielfaches des dritten Integrals umgeformt, welches später berechnet wird.

2.2. Für das zweite Integral erhält man auf direktem Wege

$$\int_{-\tau}^{\pi-\tau} \sin t \cos^5 t \, dt = \frac{-\cos^6(\pi-\tau)+\cos^6(-\tau)}{6} = 0.$$

2.3. Teilweise Integration liefert für das dritte Integral zunächst

$$\begin{aligned}\int_{-\tau}^{\pi-\tau} \sin^2 t \cos^4 t \, dt &= \int_{-\tau}^{\pi-\tau} \sin^2 t \cos t \cdot \cos^3 t \, dt \\ &= \frac{\sin^3(\pi-\tau)\cos^3(\pi-\tau)}{3} - \frac{\sin^3(-\tau)\cos^3(-\tau)}{3} \\ &\quad + \int_{-\tau}^{\pi-\tau} \frac{\sin^3 t}{3} \cdot 3 \sin t \cos^2 t \, dt.\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich wegen $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ die Beziehung

$$\begin{aligned}\int_{-\tau}^{\pi-\tau} \sin^2 t \cos^4 t \, dt &= \int_{-\tau}^{\pi-\tau} \sin^4 t \cos^2 t \, dt = \int_{-\tau}^{\pi-\tau} (1-\cos^2 t) \sin^2 t \cos^2 t \, dt \\ &= \int_{-\tau}^{\pi-\tau} \sin^2 t \cos^2 t \, dt - \int_{-\tau}^{\pi-\tau} \sin^2 t \cos^4 t \, dt\end{aligned}$$

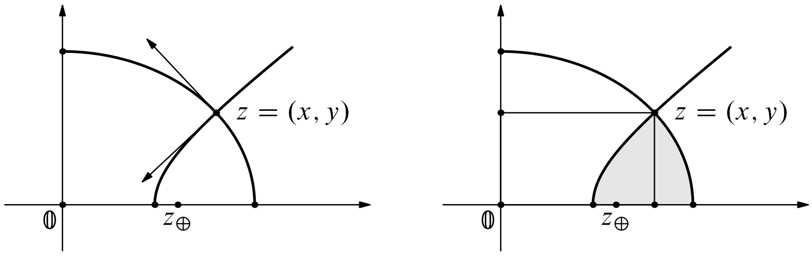
und somit wegen $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$ und $\cos 4t = 1 - 2\sin^2 2t$ folglich

$$\begin{aligned}\int_{-\tau}^{\pi-\tau} \sin^2 t \cos^4 t \, dt &= \frac{1}{2} \int_{-\tau}^{\pi-\tau} \sin^2 t \cos^2 t \, dt = \frac{1}{8} \int_{-\tau}^{\pi-\tau} \sin^2 2t \, dt \\ &= \frac{1}{16} \int_{-\tau}^{\pi-\tau} (1-\cos 4t) \, dt \\ &= \frac{\pi}{16} - \frac{\sin 4(\pi-\tau) - \sin(-4\tau)}{64} = \frac{\pi}{16}.\end{aligned}$$

3. Insgesamt liefern die Ergebnisse der Schritte 1 und 2 schließlich

$$\int_{-\tau}^{\pi-\tau} \frac{|s(t)|^2 dt}{2} = \frac{(5\sin^2\tau + \cos^2\tau)\,\pi d^2}{32} = \frac{(1+4\sin^2\tau)\,\pi d^2}{32}$$

als Inhalt der Fläche, die vom Bifolium eingeschlossen wird. □



Aufgabe 2. Seien reelle Zahlen $0 < c < \delta < a$ sowie ferner $b = \sqrt{a^2 - \delta^2} > 0$ und $d = \sqrt{\delta^2 - c^2} > 0$ gegeben. Der Bogen $E = \{(a\cos\theta, b\sin\theta) \in \mathbb{C} \mid \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$ bzw. $H = \{(c\cosh t, d\sinh t) \in \mathbb{C} \mid t \in [0, \infty[\}$ ist Teil einer Ellipse bzw. einer Hyperbel mit den *gemeinsamen* Brennpunkten $z_\ominus = (-\delta, 0)$ und $z_\oplus = (\delta, 0)$.

1. Man zeige, daß sich die Bögen E und H in $z = \left(\frac{ac}{\delta}, \frac{bd}{\delta}\right)$ senkrecht schneiden!

2. Man leite her, daß jene Fläche, welche von den Bögen E und H sowie der reellen Achse eingeschlossen wird, den Inhalt $F = \frac{1}{2}\,ab \operatorname{arccos}\frac{c}{\delta} - \frac{1}{2}\,cd \operatorname{arcosh}\frac{a}{\delta}$ besitzt! ⑧

Lösung. 1.1. Für jeden Schnittpunkt $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ der Bögen E und H gilt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{sowie} \quad \frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{d^2} = 1$$

aufgrund der Additionstheoreme, woraus sich zunächst

$$\frac{x^2}{(ad)^2} + \frac{x^2}{(bc)^2} = \frac{1}{d^2} + \frac{1}{b^2} \quad \text{und} \quad \frac{y^2}{(ad)^2} + \frac{y^2}{(bc)^2} = \frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}$$

und somit

$$x^2 = \frac{(ac)^2(b^2 + d^2)}{(ad)^2 + (bc)^2} \quad \text{sowie} \quad y^2 = \frac{(bd)^2(a^2 - c^2)}{(ad)^2 + (bc)^2}$$

ergibt. Da wegen $\delta^2 = a^2 - b^2 = c^2 + d^2$ stets die Beziehung

$$a^2d^2 + b^2c^2 = b^2(c^2 + d^2) + d^2(a^2 - b^2) = \delta^2(b^2 + d^2) = \delta^2(a^2 - c^2)$$

gilt, folgt daraus mit $x \geq 0$ und $y \geq 0$ schließlich $\delta x = ac$ und $\delta y = bd$.

1.2. Seien die Funktionen $s : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{C}$ und $h : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ durch

$$s(\theta) = (a\cos\theta, b\sin\theta) \quad \text{für } \theta \in [0, \tfrac{\pi}{2}], \qquad h(t) = (c\cosh t, d\sinh t) \quad \text{für } t \in [0, \infty[$$

definiert sowie $\alpha \in \,]0, \frac{\pi}{2}[$ und $\tau \in \,]0, \infty[$ jeweils die Parameter des Schnittpunkts

$$z = (x, y) = \left(\frac{ac}{\delta}, \frac{bd}{\delta}\right) = (a\cos\alpha, b\sin\alpha) = (c\cosh\tau, d\sinh\tau).$$

Daraus ergibt sich für die Ableitungen von s in α und von h in τ die Beziehung

$$Dh(\tau) = (c\sinh\tau, d\cosh\tau) = \left(\frac{yc}{d}, \frac{xd}{c}\right) = \left(\frac{bc}{\delta}, \frac{ad}{\delta}\right) = \left(\frac{xb}{a}, \frac{ya}{b}\right)$$
$$= -\mathbb{i} \cdot \left(-\frac{ya}{b}, \frac{xb}{a}\right) = -\mathbb{i} \cdot (-a\sin\alpha, b\cos\alpha) = -\mathbb{i} \cdot Ds(\alpha).$$

Demnach schneiden sich die Bögen E und H senkrecht im Punkt $z = (x, y) \in \mathbb{C}$.

2.1. Sei die Funktion $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$f(\xi) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \xi^2} \quad \text{für } \xi \in [0,a] \text{ definiert.}$$

Die Teilmenge $\big\{(\xi,\eta) \in \mathbb{C} \mid \xi \in [x,a],\ \eta \in [0, f(\xi)]\big\}$ hat den Flächeninhalt

$$F_E = \int_x^a f(\xi)\,d\xi = \frac{b}{a}\int_x^a \sqrt{a^2-\xi^2}\,d\xi.$$

Zur Berechnung des Integrals eignet sich die durch $\varphi(\theta) = a\cos\theta$ für $\theta \in \big[0,\frac{\pi}{2}\big]$ definierte Transformation $\varphi : \big[0,\frac{\pi}{2}\big] \to [0,a]$ der neuen Variablen θ nach $\xi = \varphi(\theta)$. Für die Intervallgrenzen $x = a\cos\alpha$ und $a = a\cos 0$ erhält man zunächst

$$\begin{aligned} F_E &= \frac{b}{a}\int_x^a \sqrt{a^2-\xi^2}\,d\xi = \frac{b}{a}\int_\alpha^0 \sqrt{a^2-\varphi^2(\theta)}\,D\varphi(\theta)\,d\theta \\ &= ab\int_0^\alpha \sqrt{1-\cos^2\theta}\,\sin\theta\,d\theta = ab\int_0^\alpha \sin^2\theta\,d\theta = \frac{ab}{2}\int_0^\alpha (1-\cos 2\theta)\,d\theta \end{aligned}$$

wegen $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$. Aus $z = (x,y) = (a\cos\alpha, b\sin\alpha)$ und $\delta x = ac$ folgt

$$F_E = \frac{ab(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)}{2} = \frac{ab\arccos\frac{c}{\delta} - xy}{2}.$$

2.2. Sei die Funktion $g : [c,x] \to \mathbb{R}$ durch

$$g(\xi) = \frac{d}{c}\sqrt{\xi^2 - c^2} \quad \text{für } \xi \in [c,x] \text{ gegeben.}$$

Die Teilmenge $\big\{(\xi,\eta) \in \mathbb{C} \mid \xi \in [c,x],\ \eta \in [0, g(\xi)]\big\}$ hat den Flächeninhalt

$$F_H = \int_c^x g(\xi)\,d\xi = \frac{d}{c}\int_c^x \sqrt{\xi^2-c^2}\,d\xi.$$

Zur Berechnung des Integrals eignet sich die durch $\psi(t) = c\cosh t$ für $t \in [0,\tau]$ definierte Transformation $\psi : [0,\tau] \to [c,x]$ der neuen Variablen t nach $\xi = \psi(t)$. Für die Intervallgrenzen $c = c\cosh 0$ und $x = c\cosh\tau$ ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned} F_H &= \frac{d}{c}\int_c^x \sqrt{\xi^2-c^2}\,d\xi = \frac{d}{c}\int_0^\tau \sqrt{\psi^2(t)-c^2}\,D\psi(t)\,dt \\ &= cd\int_0^\tau \sqrt{\cosh^2 t - 1}\,\sinh t\,dt = cd\int_0^\tau \sinh^2 t\,dt = \frac{cd}{2}\int_0^\tau (\cosh 2t - 1)\,dt \end{aligned}$$

wegen $\cosh 2t = 2\sinh^2 t + 1$. Aus $z = (x,y) = (c\cosh\tau, d\sinh\tau)$ und $\delta x = ac$ folgt

$$F_H = \frac{cd(\sinh\tau\cosh\tau - \tau)}{2} = \frac{xy - cd\,\operatorname{arcosh}\frac{a}{\delta}}{2}.$$

2.3. Schließlich erhält man den gesuchten Flächeninhalt

$$F = F_E + F_H = \frac{ab\arccos\frac{c}{\delta} - cd\,\operatorname{arcosh}\frac{a}{\delta}}{2}$$

als Summe der zuvor berechneten Inhalte. □

Aufgabe 3. Man berechne das Integral

$$\int_a^b \frac{d\xi}{\xi^2(1+\xi^2)^2}$$

für beliebig vorgegebene Intervallgrenzen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$! ⑥

Lösung. 1. Zunächst wird der Integrand in Teilbrüche zerlegt: Im Teilbruchansatz

$$\frac{1}{\xi^2(1+\xi^2)^2} = \frac{a_1}{\xi} + \frac{a_2}{\xi^2} + \frac{b_1\xi + c_1}{1+\xi^2} + \frac{b_2\xi + c_2}{(1+\xi^2)^2}$$

werden aufgrund der reellen Nullstellenfreiheit der quadratischen Nenner sechs unbekannte Koeffizienten $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ bestimmt: Für alle $\xi \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} 1 &= a_1\xi(1+\xi^2)^2 + a_2(1+\xi^2)^2 + (b_1\xi + c_1)\,\xi^2(1+\xi^2) + (b_2\xi + c_2)\,\xi^2 \\ &= a_1(\xi^5 + 2\xi^3 + \xi) + a_2(\xi^4 + 2\xi^2 + 1) + b_1(\xi^5 + \xi^3) + b_2\xi^3 + c_1(\xi^4 + \xi^2) + c_2\xi^2, \end{aligned}$$

woraus sich durch Koeffizientenvergleich vor Termen gleicher Ordnung in ξ das lineare Gleichungssystem mit sechs Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= a_1 + b_1, & 0 &= 2a_1 + b_1 + b_2, & 0 &= a_1, \\ 0 &= a_2 + c_1, & 0 &= 2a_2 + c_1 + c_2, & 1 &= a_2 \end{aligned}$$

für die sechs Unbekannten ergibt. Wegen $a_1 = 0$ und $a_2 = 1$ liefern die beiden linken Gleichungen $b_1 = 0$ und $c_1 = -1$. Aus den beiden mittleren Gleichungen erhält man schließlich $b_2 = 0$ und $c_2 = -1$ und somit die Teilbruchzerlegung

$$\frac{1}{\xi^2(1+\xi^2)^2} = \frac{1}{\xi^2} - \frac{1}{1+\xi^2} - \frac{1}{(1+\xi^2)^2}\,.$$

2. Die Integration über die beiden ersten Teilbrüche liefert die Grundintegrale

$$\int_a^b \frac{d\xi}{\xi^2} = -\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \quad \text{und} \quad \int_a^b \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \arctan b - \arctan a.$$

Das Integral über den dritten Teilbruch wird durch teilweise Integration

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{d\xi}{1+\xi^2} &= \frac{b}{1+b^2} - \frac{a}{1+a^2} + \int_a^b \frac{2\xi^2 d\xi}{(1+\xi^2)^2} \\ &= \frac{b}{1+b^2} - \frac{a}{1+a^2} + \int_a^b \frac{2\,d\xi}{1+\xi^2} - \int_a^b \frac{2\,d\xi}{(1+\xi^2)^2} \end{aligned}$$

auf das Integral des zweiten Teilbruchs zurückgeführt. Daraus folgt insgesamt

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{d\xi}{\xi^2(1+\xi^2)^2} &= \int_a^b \frac{d\xi}{\xi^2} - \int_a^b \frac{d\xi}{1+\xi^2} - \int_a^b \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^2} \\ &= -\frac{1}{b} + \frac{1}{a} - \frac{b}{2(1+b^2)} + \frac{a}{2(1+a^2)} - \frac{3}{2}\arctan b + \frac{3}{2}\arctan a \end{aligned}$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$. □

Aufgabe 4. Seien eine reelle Zahl $r \in\,]-1,1[$ beliebig vorgegeben und die beiden differenzierbaren Funktionen $c, s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$c(x) = \frac{1 - r\cos x}{1 - 2r\cos x + r^2} \quad \text{und} \quad s(x) = \frac{r\sin x}{1 - 2r\cos x + r^2} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ definiert.}$$

Man berechne für jedes $m \in \mathbb{N}$ die vier Integrale

$$\int_0^{2\pi} c(x)\cos mx\,dx,\ \int_0^{2\pi} c(x)\sin mx\,dx,\ \int_0^{2\pi} s(x)\cos mx\,dx,\ \int_0^{2\pi} s(x)\sin mx\,dx,$$

indem man jeweils eine geeignete Funktionenreihe (c_n) bzw. (s_n) nutzt, welche gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bzw. $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert!

Lösung. 1. Die beiden Funktionenreihen (c_n) und (s_n), welche als Folgen von Teilsummen $c_n, s_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ durch

$$c_n(x) = \sum_{k=0}^{n} r^k \cos kx \quad \text{und} \quad s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} r^k \sin kx \quad \text{definiert werden,}$$

konvergieren gleichmäßig gegen die Grenzfunktionen $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bzw. $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

2. Nutzt man für alle $k, m \in \mathbb{N}$ die Werte der Integrale

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \cos mx\,dx = \begin{cases} \pi & \text{für } k = m, \\ 0 & \text{für } k \neq m, \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \sin mx\,dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \sin mx\,dx = \begin{cases} \pi & \text{für } k = m, \\ 0 & \text{für } k \neq m, \end{cases}$$

dann liefert die Vertauschbarkeit der Integration und der Summation gleichmäßig konvergenter Reihen wegen $\int_0^{2\pi} \cos x\,dx = \int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0$ die gesuchten Integrale

$$\int_0^{2\pi} c(x)\cos mx\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \int_0^{2\pi} \cos kx \cos mx\,dx = \pi r^m,$$

$$\int_0^{2\pi} c(x)\sin mx\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \int_0^{2\pi} \cos kx \sin mx\,dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} s(x)\cos mx\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \int_0^{2\pi} \sin kx \cos mx\,dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} s(x)\sin mx\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \int_0^{2\pi} \sin kx \sin mx\,dx = \pi r^m$$

für jedes $m \in \mathbb{N}$. □

Aufgabe 5. Man zeige, daß die Reihe $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\, \xi^k\right)$ für jedes $\xi \in X = \,]-1,1[$ gegen den Grenzwert

$$f(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{für } \xi = 0, \\ 1 + \frac{1}{\xi}(1-\xi)\ln(1-\xi) & \text{für } \xi \in X \setminus \{0\}, \end{cases}$$

konvergiert!

Lösung. 1. Die durch die Teilsummen $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mittels

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

definierte logarithmische Potenzreihe (g_n) um $x_0 = 0$ besitzt den Konvergenzradius $R = 1$ und konvergiert für jedes $r \in \,]0,1[$ in $[-r,r]$ gleichmäßig gegen die durch $g(x) = -\ln(1-x)$ für $x \in X = \,]-1,1[$ definierte Grenzfunktion $g : X \to \mathbb{R}$. Die (summandenweise) Integration über g von 0 bis $\xi \in X$ liefert somit die Beziehung

$$\int_0^{\xi} g(x)\,dx = \int_0^{\xi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\xi} \frac{x^k\,dx}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi^{k+1}}{k(k+1)}\,.$$

2. Für alle $\xi \in X$ ergibt sich auf der linken Seite durch teilweise Integration

$$\begin{aligned} \int_0^{\xi} g(x)\,dx &= -\int_0^{\xi} 1 \cdot \ln(1-x)\,dx = -\xi\ln(1-\xi) - \int_0^{\xi} \frac{x\,dx}{1-x} \\ &= -\xi\ln(1-\xi) + \int_0^{\xi} 1\,dx - \int_0^{\xi} \frac{dx}{1-x} = \xi + (1-\xi)\ln(1-\xi). \end{aligned}$$

Wegen Schritt 1 konvergiert die Reihe $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\, \xi^k\right)$ für jedes $\xi \in X \setminus \{0\}$ gegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi^k}{k(k+1)} = \frac{1}{\xi} \int_0^{\xi} g(x)\,dx = \frac{\xi + (1-\xi)\ln(1-\xi)}{\xi} = f(\xi)$$

und offensichtlich auch für $\xi = 0$ gegen den Grenzwert $f(\xi) = 0$. □

Alternative Lösung. 1. Die Potenzreihe (s_n) um $x_0 = 0$ mit den durch $a_0 = 0$ und $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$ für $k \in \mathbb{N}$ definierten Koeffizienten (a_k) hat wegen des Quotientenkriteriums den Konvergenzradius $R = 1$ und konvergiert in $X =]-1, 1[$ gegen die durch

$$s(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi^k}{k(k+1)} \quad \text{für } \xi \in X$$

definierte analytische Grenzfunktion $s : X \to \mathbb{R}$.

2. Die summandenweise differenzierte Potenzreihe (Ds_n) um $x_0 = 0$ mit den Koeffizienten $((k+1)a_{k+1})$ hat den Konvergenzradius $R = 1$ und konvergiert in X gegen die Ableitung $Ds : X \to \mathbb{R}$ der Grenzfunktion $s : X \to \mathbb{R}$. Es gilt

$$Ds(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi^{k-1}}{k+1} \quad \text{für alle } \xi \in X \quad \text{und somit} \quad Ds(0) = \frac{1}{2}\,.$$

Die Summenformel

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi^k}{k} = -\ln(1-\xi) \quad \text{für alle } \xi \in X$$

der logarithmischen Reihe liefert

$$Ds(\xi) = \frac{1}{\xi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi^{k+1}}{k+1} = \frac{1}{\xi^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\xi^k}{k} = -\frac{\ln(1-\xi)}{\xi^2} - \frac{1}{\xi} \quad \text{für alle } \xi \in X \setminus \{0\}.$$

3. Die durch die obige Vorschrift definierte Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist stetig, denn nach Bernoulli-de l'Hospital gilt

$$\lim_{\xi \to 0} f(\xi) = 1 + \lim_{\xi \to 0} \frac{(1-\xi)\ln(1-\xi)}{\xi} = 1 - \lim_{\xi \to 0} (\ln(1-\xi) + 1) = 0.$$

Darüberhinaus hat f in jedem Punkt $\xi \in X \setminus \{0\}$ die Ableitung

$$Df(\xi) = -\frac{\ln(1-\xi)}{\xi^2} - \frac{1-\xi}{\xi(1-\xi)} = -\frac{\ln(1-\xi)}{\xi^2} - \frac{1}{\xi}$$

und ist zudem in $\xi = 0$ differenzierbar, denn nach Bernoulli-de l'Hospital gilt

$$\begin{aligned} Df(0) &= \lim_{\xi \to 0} \frac{f(\xi) - f(0)}{\xi - 0} = \lim_{\xi \to 0} \frac{\xi + (1-\xi)\ln(1-\xi)}{\xi^2} \\ &= -\lim_{\xi \to 0} \frac{\ln(1-\xi)}{2\xi} = \lim_{\xi \to 0} \frac{1}{2(1-\xi)} = \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Aufgrund von Schritt 2 hat die Differenz $h = s - f$ für jedes $\xi \in X$ die Ableitung $Dh(\xi) = 0$, es gilt also $h(\xi) = h(0)$ für alle $\xi \in X$. Da $f(0) = 0$ und $s(0) = 0$ gelten, ergibt sich schließlich $s(\xi) = f(\xi)$ für alle $\xi \in X$. $\square$

Aufgabe 6. Sei für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ das Integral $S_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n \xi \, d\xi$ gegeben.

1. Man weise (durch teilweise Integration) nach, daß die Rekursionsformel

$$S_0 = \frac{\pi}{2}, \quad S_1 = 1, \quad nS_n = (n-1)S_{n-2} \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \text{ gilt!}$$

2. Man schließe daraus (induktiv), daß stets

$$S_{2k} = \frac{\pi}{2} \prod_{\ell=1}^{k} \frac{2\ell - 1}{2\ell} \quad \text{sowie} \quad S_{2k+1} = \prod_{\ell=1}^{k} \frac{2\ell}{2\ell + 1} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ gilt!}$$

3. Man zeige, daß für alle $k \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $S_{2k+1} \leq S_{2k} \leq S_{2k-1}$ gilt und leite daraus die Grenzwertbeziehung

$$\lim_{k \to \infty} \pi k \prod_{\ell=1}^{k} \frac{(2\ell - 1)^2}{(2\ell)^2} = 1 \quad \text{her!}$$

Lösung. 1. Für jedes $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ergibt sich durch teilweise Integration

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^n \xi \, d\xi = \int_0^{\pi/2} (-\sin^{n-1} \xi) \cdot (-\sin \xi) \, d\xi \\ &= \int_0^{\pi/2} (n-1) \sin^{n-2} \xi \cdot \cos^2 \xi \, d\xi = \int_0^{\pi/2} (n-1) \sin^{n-2} \xi \cdot (1 - \sin^2 \xi) \, d\xi \end{aligned}$$

und somit $S_n = (n-1)(S_{n-2} - S_n)$, also $nS_n = (n-1)S_{n-2}$. Außerdem erhält man mit Hilfe von Grundintegralen

$$S_0 = \int_0^{\pi/2} 1 \, d\xi = \frac{\pi}{2} \quad \text{sowie} \quad S_1 = \int_0^{\pi/2} \sin \xi \, d\xi = 1.$$

2. Der Beweis der Darstellungen für S_{2k} und S_{2k+1} erfolgt induktiv über $k \in \mathbb{N}$:

Induktionsanfang: Für $k = 1$ gelten aufgrund der Rekursionsformel tatsächlich sowohl $S_2 = \frac{1}{2} S_0 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2}$ als auch $S_3 = \frac{2}{3} S_1 = \frac{2}{3}$.

Induktionsschritt: Sei die Induktionsvoraussetzung für ein $k \in \mathbb{N}$ erfüllt. Dann liefern die beiden Darstellungen für S_{2k} und S_{2k+1} aufgrund der Rekursionsformel

$$\begin{aligned} S_{2k+2} &= \frac{2k+1}{2k+2} S_{2k} = \frac{2k+1}{2k+2} \cdot \frac{\pi}{2} \prod_{\ell=1}^{k} \frac{2\ell - 1}{2\ell} = \frac{\pi}{2} \prod_{\ell=1}^{k+1} \frac{2\ell - 1}{2\ell}, \\ S_{2k+3} &= \frac{2k+2}{2k+3} S_{2k+1} = \frac{2k+2}{2k+3} \prod_{\ell=1}^{k} \frac{2\ell}{2\ell + 1} = \prod_{\ell=1}^{k+1} \frac{2\ell}{2\ell + 1}, \end{aligned}$$

woraus sich die Induktionsbehauptung ergibt.

3. Da für alle $\xi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ stets $0 \le \sin \xi \le 1$ gilt, liefert das Vergleichsprinzip

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2k+1}\xi \, d\xi \le \int_0^{\pi/2} \sin^{2k}\xi \, d\xi \le \int_0^{\pi/2} \sin^{2k-1}\xi \, d\xi,$$

also $S_{2k+1} \le S_{2k} \le S_{2k-1}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, und mit Schritt 2 folgt die Abschätzung

$$\prod_{\ell=1}^{k} \frac{2\ell}{2\ell+1} \le \frac{\pi}{2} \prod_{\ell=1}^{k} \frac{2\ell-1}{2\ell} \le \prod_{\ell=1}^{k-1} \frac{2\ell}{2\ell+1} = \frac{2k+1}{2k} \prod_{\ell=1}^{k} \frac{2\ell}{2\ell+1}\,.$$

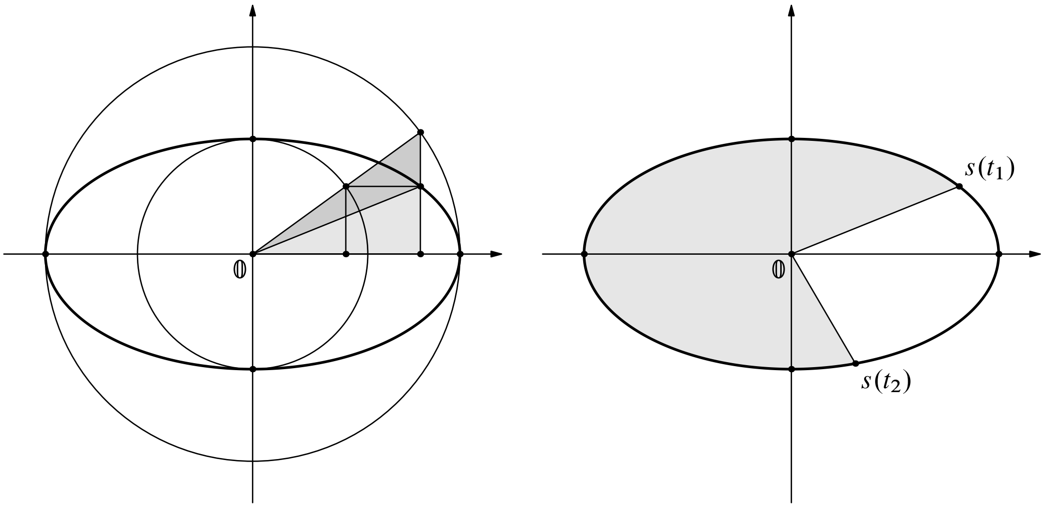
Nach Multiplikation mit $\prod_{\ell=1}^{k} \frac{2\ell-1}{2\ell}$ erhält man

$$\frac{1}{2k+1} = \prod_{\ell=1}^{k} \frac{2\ell-1}{2\ell+1} \le \frac{\pi}{2} \prod_{\ell=1}^{k} \frac{(2\ell-1)^2}{(2\ell)^2} \le \frac{2k+1}{2k} \prod_{\ell=1}^{k} \frac{2\ell-1}{2\ell+1} = \frac{2k+1}{2k(2k+1)} = \frac{1}{2k}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und somit schließlich

$$\frac{2k}{2k+1} \le \pi k \prod_{\ell=1}^{k} \frac{(2\ell-1)^2}{(2\ell)^2} \le 1, \quad \text{also} \quad \lim_{k\to\infty} \pi k \prod_{\ell=1}^{k} \frac{(2\ell-1)^2}{(2\ell)^2} = 1$$

als gewünschte Grenzwertbeziehung. $\square$



Aufgabe 7. Sei eine Ellipse $\{s(t) \in \mathbb{C} \mid t \in [0, 2\pi]\}$ mit den Halbachsen $a > 0$ und $b > 0$ um den Nullpunkt durch die Funktion $s : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mittels

$$s(t) = (a\cos t, b\sin t) \quad \text{für } t \in [0, 2\pi] \text{ dargestellt.}$$

Man weise nach, daß der elliptische Sektor

$$S(t_1, t_2) = \{\lambda s(t) \in \mathbb{C} \mid t \in [t_1, t_2],\ \lambda \in [0, 1]\}$$

für $t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$ mit $t_1 < t_2$ den Flächeninhalt $F(t_1, t_2) = \frac{1}{2}(t_2 - t_1)\,ab$ besitzt!

Lösung. 1. Um die Leibniz-Sektorformel verwenden zu können, soll eine streng monoton wachsende und bijektive Parametertransformation $\varphi : [0, 2\pi] \to [0, 2\pi]$ des Polarwinkels $\tau \in [0, 2\pi]$ in die alte Variable $t = \varphi(\tau) \in [0, 2\pi]$ bestimmt werden, welche eine Darstellung der Ellipse in Polarkoordinaten

$$\text{(1)} \qquad \rho(\tau)(\cos\tau, \sin\tau) = s(\varphi(\tau)) = (a\cos\varphi(\tau), b\sin\varphi(\tau)) \quad \text{für } \tau \in [0, 2\pi]$$

mit Hilfe einer Abstandsfunktion $\rho : [0, 2\pi] \to\ ]0, \infty[$ gestattet. Funktionen mit diesen Eigenschaften liefert eine Ellipsenkonstruktion zwischen den Kreislinien um $\mathbb{0}$ mit den Halbachsen a und b als Radien: Teilt man in Gleichung (1) die Realteile durch a und die Imaginärteile durch b, so erhält man die Betragsquadrate

$$\rho^2(\tau)\left(\frac{\cos^2\tau}{a^2} + \frac{\sin^2\tau}{b^2}\right) = \cos^2\varphi(\tau) + \sin^2\varphi(\tau) = 1$$

und somit für jedes $\tau \in [0, 2\pi]$ die Darstellungen

$$\rho(\tau) = \frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\tau + a^2\sin^2\tau}} \quad \text{und} \quad (\cos\varphi(\tau), \sin\varphi(\tau)) = \frac{(b\cos\tau, a\sin\tau)}{\sqrt{b^2\cos^2\tau + a^2\sin^2\tau}}$$

der (unendlichmal) differenzierbaren Funktionen ρ und φ.

2. Seien $t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$ mit $t_1 < t_2$ gegeben. Sind $\tau_1, \tau_2 \in [0, 2\pi]$ mit $\tau_1 < \tau_2$ die entsprechenden Polarwinkel mit $\varphi(\tau_1) = t_1$ und $\varphi(\tau_2) = t_2$, so hat der elliptische Sektor $S(t_1, t_2)$ gemäß der Leibniz-Sektorformel den Flächeninhalt

$$\begin{aligned} F(t_1, t_2) &= \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \rho^2(\tau)\, d\tau = \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \rho^2(\tau)(\cos^2\tau + \sin^2\tau)\, d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \rho(\tau) \sin\tau \cdot (\rho(\tau) \sin\tau - D\rho(\tau) \cos\tau)\, d\tau \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \rho(\tau) \cos\tau \cdot (\rho(\tau) \cos\tau + D\rho(\tau) \sin\tau)\, d\tau. \end{aligned}$$

Da sich durch Differentiation in Gleichung (1) die Beziehungen

$$\begin{aligned} -a D\varphi(\tau) \sin\varphi(\tau) &= D\rho(\tau) \cos\tau - \rho(\tau) \sin\tau \\ bD\varphi(\tau) \cos\varphi(\tau) &= D\rho(\tau) \sin\tau + \rho(\tau) \cos\tau \end{aligned}$$

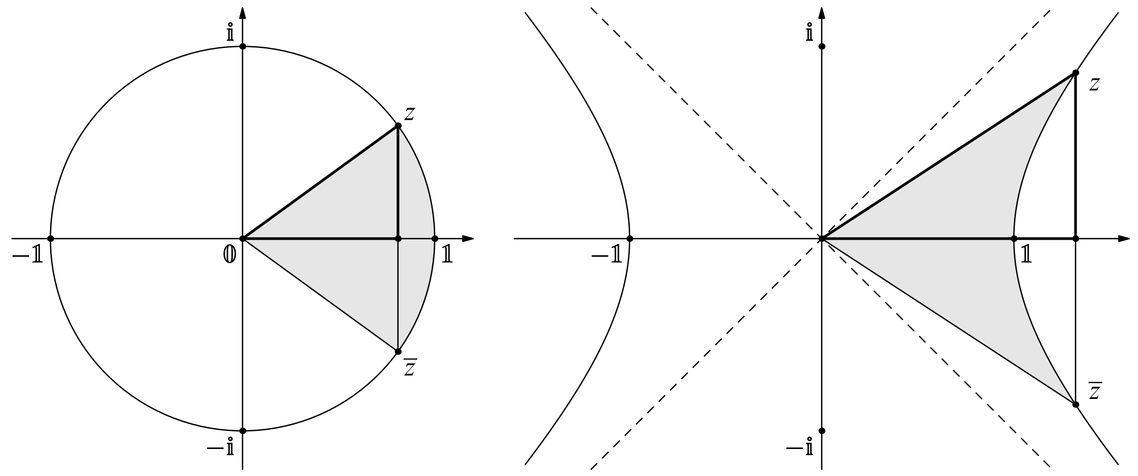
für $\tau \in [0, 2\pi]$ ergeben, folgt daraus für den Flächeninhalt

$$\begin{aligned} F(t_1, t_2) &= \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} a\rho(\tau) \sin\tau \sin\varphi(\tau) \cdot D\varphi(\tau)\, d\tau \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} b\rho(\tau) \cos\tau \cos\varphi(\tau) \cdot D\varphi(\tau)\, d\tau. \end{aligned}$$

Die Parametertransformation $\varphi : [0, 2\pi] \to [0, 2\pi]$ des Polarwinkels $\tau \in [0, 2\pi]$ in die alte Variable $t = \varphi(\tau) \in [0, 2\pi]$ liefert wegen Gleichung (1) schließlich

$$F(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} ab\big(\sin^2 t + \cos^2 t\big)\, dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} ab\, dt = \frac{(t_2 - t_1)\, ab}{2}$$

als Flächeninhalt des elliptischen Sektors $S(t_1, t_2)$. $\square$



Aufgabe 8. 1. Sei $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ auf dem Kreis $\big\{(\cos\alpha, \sin\alpha) \in \mathbb{C} \mid \alpha \in [0, 2\pi]\big\}$ mit $x > 0$, $y > 0$ vorgegeben. Man zeige, daß das Flächenstück, das von der Kreislinie zwischen den Punkten $\overline{z}$ und z und dem Streckenzug von z über $\mathbb{0}$ zu $\overline{z}$ begrenzt wird, den Inhalt $F = \arccos x = \arcsin y$ besitzt!

2. Sei $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ auf der Hyperbel $\big\{(\cosh\tau, \sinh\tau) \in \mathbb{C} \mid \tau \in \mathbb{R}\big\}$ mit $x > 1$, $y > 0$ vorgegeben. Man zeige, daß das Flächenstück, das von der Hyperbel zwischen den Punkten $\overline{z}$ und z und dem Streckenzug von z über $\mathbb{0}$ zu $\overline{z}$ begrenzt wird, den Inhalt $F = \operatorname{arcosh} x = \operatorname{arsinh} y$ besitzt!

Lösung. 1. Sei $\alpha \in \big]0, \frac{\pi}{2}\big[$ jener Winkel, für den die Darstellung $(x, y) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ gilt und die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$f(\xi) = \begin{cases} \xi \tan\alpha & \text{für } \xi \in [0, x], \\ \sqrt{1 - \xi^2} & \text{für } \xi \in [x, 1], \end{cases}$$

gegeben. Dann erhält man $F = 2\int_0^1 f(\xi)\, d\xi$ als gesuchten Flächeninhalt, das heißt,

$$F = \int_0^x 2\xi \tan\alpha \, d\xi + \int_x^1 2\sqrt{1 - \xi^2}\, d\xi = \sin\alpha\cos\alpha + \int_x^1 2\sqrt{1 - \xi^2}\, d\xi.$$

Zur Berechnung des letzten Integrals eignet sich die durch $\varphi(\theta) = \cos\theta$ für $\theta \in \big[0, \frac{\pi}{2}\big]$ definierte Transformation $\varphi : \big[0, \frac{\pi}{2}\big] \to [0, 1]$ der neuen Variablen θ nach ξ. Für die Intervallgrenzen $x = \cos\alpha = \varphi(\alpha)$ sowie $1 = \cos 0 = \varphi(0)$ erhält man zunächst

$$\int_x^1 2\sqrt{1 - \xi^2}\, d\xi = \int_\alpha^0 2\sqrt{1 - \varphi^2(\theta)}\, D\varphi(\theta)\, d\theta = \int_0^\alpha 2\sqrt{1 - \cos^2\theta}\, \sin\theta\, d\theta$$

und somit wegen $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ sowie $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ auch

$$\int_x^1 2\sqrt{1 - \xi^2}\, d\xi = \int_0^\alpha 2\sin^2\theta\, d\theta = \int_0^\alpha (1 - \cos 2\theta)\, d\theta = \alpha - \sin\alpha\cos\alpha.$$

Mit $(x, y) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ folgt daraus schließlich $F = \alpha = \arccos x = \arcsin y$.

2. Sei $\tau \in \,]0, \infty[$ jener Parameter, für den die Darstellung $(x, y) = (\cosh\tau, \sinh\tau)$ gilt und die Funktion $f : [0, x] \to \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$f(\xi) = \begin{cases} \xi \tanh\tau & \text{für } \xi \in [0, 1], \\ \xi \tanh\tau - \sqrt{\xi^2 - 1} & \text{für } \xi \in [1, x], \end{cases}$$

gegeben. Dann erhält man $F = 2\int_0^x f(\xi)\, d\xi$ als gesuchten Flächeninhalt, das heißt,

$$F = \int_0^x 2\xi \tanh\tau\, d\xi - \int_1^x 2\sqrt{\xi^2 - 1}\, d\xi = \sinh\tau\cosh\tau - \int_1^x 2\sqrt{\xi^2 - 1}\, d\xi.$$

Zur Berechnung des letzten Integrals eignet sich die durch $\varphi(t) = \cosh t$ für $t \in [0, \tau]$ definierte Transformation $\varphi : [0, \tau] \to [1, x]$ der neuen Variablen t nach ξ. Für die Intervallgrenzen $1 = \cosh 0 = \varphi(0)$ sowie $x = \cosh\tau = \varphi(\tau)$ erhält man zunächst

$$\int_1^x 2\sqrt{\xi^2 - 1}\, d\xi = \int_0^\tau 2\sqrt{\varphi^2(t) - 1}\, D\varphi(t)\, dt = \int_0^\tau 2\sqrt{\cosh^2 t - 1}\, \sinh t\, dt$$

und somit wegen $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ sowie $\cosh 2t = 1 + 2\sinh^2 t$ auch

$$\int_1^x 2\sqrt{\xi^2 - 1}\, d\xi = \int_0^\tau 2\sinh^2 t\, dt = \int_0^\tau (\cosh 2t - 1)\, dt = \sinh\tau\cosh\tau - \tau.$$

Mit $(x, y) = (\cosh\tau, \sinh\tau)$ folgt daraus $F = \tau = \operatorname{arcosh} x = \operatorname{arsinh} y$. $\square$

Aufgabe 9. Seien Intervallgrenzen a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben und die Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch $g(\xi) = \exp(\xi)$ für $\xi \in [a,b]$ definiert. Für festgehaltenes $m \in \mathbb{N}$ werde das Intervall $[a,b]$ durch die Punkte

$$x_0 = a < \xi_1 = x_1 = a + \delta < \cdots < \xi_{m-1} = \xi_{m-1} = a + (m-1)\delta < \xi_m = x_m = b$$

gleichmäßig in m Teilintervalle der Länge $\delta = \frac{b-a}{m} > 0$ zerlegt. Man zeige, daß die Riemann-Summe über g die Gestalt

$$\sum_{k=1}^{m} g(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{\delta \exp(\delta)(\exp(b) - \exp(a))}{\exp(\delta) - 1}$$

besitzt und leite daraus den Wert des Integrals $\int_a^b \exp(\xi)\, d\xi = \exp(b) - \exp(a)$ her!

Lösung. 1. Aufgrund der Formel für die geometrische Summe und $\exp(\delta) \neq 1$ ergibt sich folgende Riemann-Summe über g bezüglich obiger Zerlegung

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} g(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{m} \delta \exp(a + k\delta) &= \delta \exp(a+\delta) \sum_{k=0}^{m-1} \exp(k\delta) \\ &= \delta \exp(a+\delta) \frac{\exp(m\delta) - 1}{\exp(\delta) - 1} = \frac{\delta \exp(\delta)(\exp(b) - \exp(a))}{\exp(\delta) - 1}.\end{aligned}$$

2. Im Grenzprozeß $m \to \infty$ folgt $\delta \downarrow 0$ und somit das Integral

$$\int_a^b \exp(\xi)\, d\xi = \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{\delta \exp(\delta)(\exp(b) - \exp(a))}{\exp(\delta) - 1} = \exp(b) - \exp(a)$$

als Grenzwert wegen $\lim_{\delta \downarrow 0} \frac{\exp(\delta) - 1}{\delta} = 1$. □

Aufgabe 10. Seien Grenzen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Für festgehaltenes $m \in \mathbb{N}$ werde das Intervall $[a, b]$ durch die Punkte

$$a = x_0 < \xi_1 = x_1 = a + 2\delta < \cdots < \xi_k = x_k = a + 2\delta k < \cdots < \xi_m = x_m = b$$

gleichmäßig in m Teilintervalle der Länge $2\delta = \frac{1}{m}(b - a) > 0$ zerlegt. Man zeige, daß die Riemann-Summen über Sinus bzw. Cosinus die Gestalt

$$\sum_{k=1}^{m} \sin(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{\delta}{\sin\delta}\big(\cos(a + \delta) - \cos(b + \delta)\big)$$
$$\sum_{k=1}^{m} \cos(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{\delta}{\sin\delta}\big(\sin(b + \delta) - \sin(a + \delta)\big)$$

besitzen und leite daraus die Werte der Integrale $\int_a^b \sin\xi\, d\xi = \cos a - \cos b$ und $\int_a^b \cos\xi\, d\xi = \sin b - \sin a$ her!

Lösung. 1. Man erhält für die Sinusfunktion die Riemann-Summe

$$\sum_{k=1}^{m} \sin(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{m} 2\delta \sin(a + 2\delta k) = \frac{\delta}{\sin\delta} \sum_{k=1}^{m} 2\sin(a + 2\delta k)\sin\delta.$$

Aufgrund der Additionstheoreme ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} \sin(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) &= \frac{\delta}{\sin\delta} \sum_{k=1}^{m} \big(\cos(a + (2k-1)\delta) - \cos(a + (2k+1)\delta)\big) \\ &= \frac{\delta}{\sin\delta}\big(\cos(a + \delta) - \cos(b + \delta)\big).\end{aligned}$$

Im Grenzprozeß $m \to \infty$ ergibt sich $\delta \downarrow 0$ und somit wegen $\lim_{\delta\to 0} \frac{\sin\delta}{\delta} = 1$ wie erwartet $\int_a^b \sin\xi\, d\xi = \cos a - \cos b$.

2. Für die Cosinusfunktion ergibt sich die Riemann-Summe

$$\sum_{k=1}^{m} \cos(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{m} 2\delta \cos(a + 2\delta k) = \frac{\delta}{\sin\delta} \sum_{k=1}^{m} 2\cos(a + 2\delta k)\sin\delta.$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme erhält man demnach

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} \cos(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) &= \frac{\delta}{\sin\delta} \sum_{k=1}^{m} \big(\sin(a + (2k+1)\delta) - \sin(a + (2k-1)\delta)\big) \\ &= \frac{\delta}{\sin\delta}\big(\sin(b + \delta) - \sin(a + \delta)\big).\end{aligned}$$

Im Grenzprozeß $m \to \infty$ folgt $\delta \downarrow 0$ und somit wegen $\lim_{\delta\to 0} \frac{\sin\delta}{\delta} = 1$ erwartungsgemäß $\int_a^b \cos\xi\, d\xi = \sin b - \sin a$. $\square$

Aufgabe 11. Seien Grenzen a, $b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$ gegeben und die Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch $g(\xi) = \frac{1}{\xi}$ für $\xi \in [a, b]$ definiert. Für festgehaltenes $m \in \mathbb{N}$ werde mit Hilfe des Teilungsverhältnisses

$$q = \frac{\sqrt[m]{b}}{\sqrt[m]{a}} > 1$$

das Intervall $[a, b]$ durch eine *geometrische* Folge von Punkten

$$x_0 = \xi_1 = a < x_1 = \xi_2 = aq < \cdots < x_{m-1} = \xi_m = aq^{m-1} < x_m = aq^m = b$$

in m Teilintervalle zerlegt. Man zeige, daß die Riemann-Summe über g die Gestalt

$$\sum_{k=1}^{m} g(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = m(q-1)$$

besitzt und leite daraus den Wert des Integrals $\int_a^b \frac{d\xi}{\xi} = \ln(b) - \ln(a)$ her!

Lösung. 1. Die Riemann-Summe über g bezüglich obiger Zerlegung hat die Gestalt

$$\sum_{k=1}^{m} g(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{m} \frac{aq^k - aq^{k-1}}{aq^{k-1}} = \sum_{k=0}^{m-1}(q-1) = m(q-1).$$

Im Grenzprozeß $m \to \infty$ ergibt sich $q \downarrow 1$ wegen $0 < a < b$ und somit das Integral

$$\int_a^b \frac{d\xi}{\xi} = (\ln(b) - \ln(a)) \cdot \lim_{q \downarrow 1} \frac{q-1}{\ln(q)} = \ln(b) - \ln(a)$$

als Grenzwert wegen $m \ln(q) = \ln(b) - \ln(a)$ und $\lim_{q\downarrow 1} \frac{\ln(q)}{q-1} = 1$. $\square$