Übungsaufgaben 12

Uneigentliche Integrale

Aufgabe 1. Seien beliebige Parameter $\omega, \beta > 0$ und Grenzen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Man berechne die beiden Integrale

$$\int_a^b \mathrm{e}^{-\omega t} \sin \beta t \, dt \quad \text{und} \quad \int_a^b \mathrm{e}^{-\omega t} \cos \beta t \, dt$$

und führe die Grenzübergänge $a \to 0$ und $b \to \infty$ aus! ⑥

Lösung. 1. Die teilweise Integration des ersten Integrals liefert zunächst

$$\int_a^b \mathrm{e}^{-\omega t} \sin \beta t \, dt + \frac{\omega}{\beta} \int_a^b \mathrm{e}^{-\omega t} \cos \beta t \, dt = \frac{\mathrm{e}^{-\omega a} \cos \beta a - \mathrm{e}^{-\omega b} \cos \beta b}{\beta} .$$

Das zweite Integral wird durch teilweise Integration auf das erste zurückgeführt:

$$\int_a^b \mathrm{e}^{-\omega t} \cos \beta t \, dt - \frac{\omega}{\beta} \int_a^b \mathrm{e}^{-\omega t} \sin \beta t \, dt = \frac{\mathrm{e}^{-\omega b} \sin \beta b - \mathrm{e}^{-\omega a} \sin \beta a}{\beta} .$$

Diese Beziehungen bilden ein lineares Gleichungssystem für die beiden gesuchten Integrale: Subtrahiert man das $\frac{\omega}{\beta}$-fache der zweiten von der ersten Gleichung bzw. addiert man das $\frac{\omega}{\beta}$-fache der ersten zur zweiten Gleichung, so folgt mit $R^2 = \omega^2 + \beta^2$

$$\int_a^b \mathrm{e}^{-\omega t} \sin \beta t \, dt = \frac{\beta\big(\mathrm{e}^{-\omega a} \cos \beta a - \mathrm{e}^{-\omega b} \cos \beta b\big)}{R^2} - \frac{\omega\big(\mathrm{e}^{-\omega b} \sin \beta b - \mathrm{e}^{-\omega a} \sin \beta a\big)}{R^2} ,$$

$$\int_a^b \mathrm{e}^{-\omega t} \cos \beta t \, dt = \frac{\beta\big(\mathrm{e}^{-\omega b} \sin \beta b - \mathrm{e}^{-\omega a} \sin \beta a\big)}{R^2} + \frac{\omega\big(\mathrm{e}^{-\omega a} \cos \beta a - \mathrm{e}^{-\omega b} \cos \beta b\big)}{R^2} .$$

2. Führt man Polarkoordinaten $R \in \,]0, \infty[$, $\alpha \in \mathbb{R}$ für $(-\omega, \beta) = (R \cos \alpha, R \sin \alpha)$ ein, dann liefern die Additionstheoreme die Integrale

$$\int_a^b \mathrm{e}^{-\omega t} \sin \beta t \, dt = \frac{\mathrm{e}^{-\omega b} \sin(\beta b - \alpha)}{R} - \frac{\mathrm{e}^{-\omega a} \sin(\beta a - \alpha)}{R} ,$$

$$\int_a^b \mathrm{e}^{-\omega t} \cos \beta t \, dt = \frac{\mathrm{e}^{-\omega b} \cos(\beta b - \alpha)}{R} - \frac{\mathrm{e}^{-\omega a} \cos(\beta a - \alpha)}{R}$$

in kompakter Schreibweise.

3. Für $a = 0$ liefert der Grenzübergang $b \to \infty$ wegen $\omega > 0$ schließlich die Werte

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\omega t} \sin \beta t \, dt = \lim_{b \to \infty} \frac{\mathrm{e}^{-\omega b} \sin(\beta b - \alpha)}{R} + \frac{\sin \alpha}{R} = \frac{\sin \alpha}{R} = \frac{\beta}{R^2} = \frac{\beta}{\omega^2 + \beta^2}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\omega t} \cos \beta t \, dt = \lim_{b \to \infty} \frac{\mathrm{e}^{-\omega b} \cos(\beta b - \alpha)}{R} - \frac{\cos \alpha}{R} = -\frac{\cos \alpha}{R} = \frac{\omega}{R^2} = \frac{\omega}{\omega^2 + \beta^2}$$

für die gesuchten uneigentlichen Integrale. □

Alternative Lösung. 1. Nutzt man für $\zeta = (-\omega, \beta) \in \mathbb{C}$ die Darstellung

$$\operatorname{Exp}(t\zeta) = \mathrm{e}^{-\omega t}(\cos\beta t, \sin\beta t) \quad \text{für } t \in \mathbb{R},$$

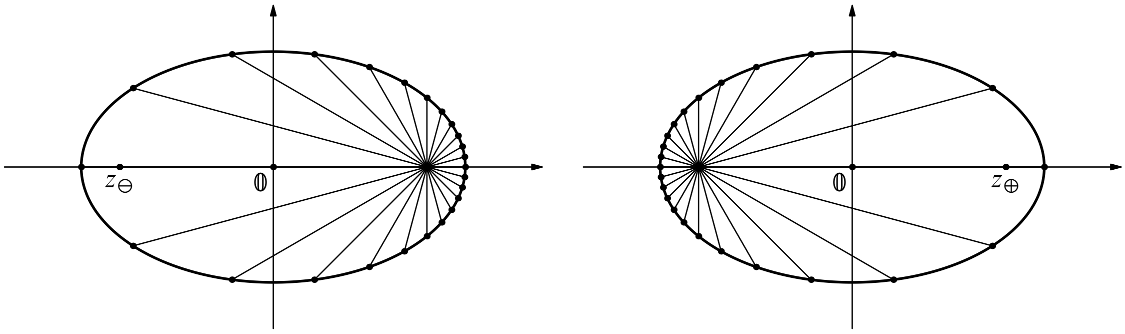
so liefert die Integration über diese komplexwertige Exponentialfunktion sofort

$$\begin{aligned}\int_a^b \operatorname{Exp}(t\zeta)\,dt &= \frac{\operatorname{Exp}(b\zeta) - \operatorname{Exp}(a\zeta)}{\zeta} = \frac{(\operatorname{Exp}(b\zeta) - \operatorname{Exp}(a\zeta)) \cdot \overline{\zeta}}{|\zeta|^2} \\ &= \frac{\big(\mathrm{e}^{-\omega a}(\cos\beta a, \sin\beta a) - \mathrm{e}^{-\omega b}(\cos\beta b, \sin\beta b)\big) \cdot (\omega, \beta)}{\omega^2 + \beta^2}\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathrm{e}^{-\omega t}\cos\beta t\,dt &= \frac{\beta\big(\mathrm{e}^{-\omega b}\sin\beta b - \mathrm{e}^{-\omega a}\sin\beta a\big)}{\omega^2 + \beta^2} + \frac{\omega\big(\mathrm{e}^{-\omega a}\cos\beta a - \mathrm{e}^{-\omega b}\cos\beta b\big)}{\omega^2 + \beta^2}, \\ \int_a^b \mathrm{e}^{-\omega t}\sin\beta t\,dt &= \frac{\beta\big(\mathrm{e}^{-\omega a}\cos\beta a - \mathrm{e}^{-\omega b}\cos\beta b\big)}{\omega^2 + \beta^2} - \frac{\omega\big(\mathrm{e}^{-\omega b}\sin\beta b - \mathrm{e}^{-\omega a}\sin\beta a\big)}{\omega^2 + \beta^2}\end{aligned}$$

durch Vergleich von Real- und Imaginärteil auf beiden Seiten. □



Aufgabe 2. Seien reelle Zahlen $a \geq b > 0$ sowie $\delta = \sqrt{a^2 - b^2}$ vorgegeben und die Ellipse $\{s(\theta) \in \mathbb{C} \mid \theta \in [-\pi, \pi]\}$ mit den Halbachsen a und b sowie den beiden Brennpunkten $z_\oplus = (\delta, 0) \in \mathbb{C}$ und $z_\ominus = (-\delta, 0) \in \mathbb{C}$ mit Hilfe der durch

$$\rho(\theta) = \frac{b^2}{a + \delta \cos\theta} \quad \text{und} \quad s(\theta) = z_\oplus + \rho(\theta)(\cos\theta, \sin\theta) \quad \text{für } \theta \in [-\pi, \pi]$$

definierten Funktionen $\rho : [-\pi, \pi] \to]0, \infty[$ und $s : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ in Polarkoordinaten bezüglich des Pols $z_\oplus$ dargestellt. Man berechne den integralen Mittelwert

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{b^2 d\theta}{a + \delta \cos\theta}$$

der Abstandsfunktion ρ über alle Polarwinkel $\theta \in [-\pi, \pi]$, indem man durch eine Variablentransformation zu einem Integral über eine rationale Funktion gelangt! ⑥

Lösung. 1. Der Vollständigkeit halber soll die obige Gestalt der Abstandsfunktion $\rho : [-\pi, \pi] \to]0, \infty[$ für die Darstellung $s : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ einer Ellipse mit den Halbachsen a und b in Polarkoordinaten bezüglich des Pols $z_\oplus$ hergeleitet werden:

Um einzusehen, daß für jeden Punkt $(x, y) \in \mathbb{C}$ der Ellipse jeweils ein Polarwinkel $\theta \in [0, 2\pi]$ mit $(x, y) = s(\theta)$ existiert, untersucht man die Gleichung

$$\frac{(\rho(\theta)\cos\theta + \delta)^2}{a^2} + \frac{(\rho(\theta)\sin\theta)^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Äquivalente Umformungen liefern wegen $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ zunächst

$$b^2\big(\rho^2(\theta)\cos^2\theta + 2\delta\rho(\theta)\cos\theta + \delta^2\big) + a^2\rho^2(\theta)(1 - \cos^2\theta) = a^2 b^2$$

und somit wegen $\delta^2 = a^2 - b^2$ auch

$$a^2\rho^2(\theta) = b^4 - 2b^2\delta\rho(\theta)\cos\theta + \delta^2\rho^2(\theta)\cos^2\theta = \big(b^2 - \delta\rho(\theta)\cos\theta\big)^2,$$

woraus sich

$$\big(b^2 - \rho(\theta)(a + \delta\cos\theta)\big)\big(b^2 + \rho(\theta)(a - \delta\cos\theta)\big) = 0$$

ergibt. Die Positivität des zweiten Faktors liefert schließlich $b^2 = \rho(\theta)(a + \delta\cos\theta)$ und somit die obige Gestalt der Abstandsfunktion $\rho : [-\pi, \pi] \to]0, \infty[$.

2. Seien $\alpha, \beta \in \,]-\pi, \pi[$ vorgegeben. Zur Berechnung des Integrals

$$\int_\alpha^\beta \frac{b^2 d\theta}{a + \delta\cos\theta} = \int_c^d \frac{b^2 D\varphi(\xi)\, d\xi}{a + \delta\cos\varphi(\xi)}$$

eignet sich die durch $\varphi(\xi) = 2\arctan\xi$ definierte Transformation $\varphi : \mathbb{R} \to \,]-\pi, \pi[$ der neuen Variablen $\xi \in \mathbb{R}$ in die alte Variable $\theta = \varphi(\xi) \in \,]-\pi, \pi[$, wobei die neuen Grenzen $c, d \in \mathbb{R}$ durch $\varphi(c) = \alpha$ und $\varphi(d) = \beta$ gegeben sind. Aus der Beziehung $\xi = \varphi^{-1}(\theta) = \tan\frac{\theta}{2}$ ergibt sich

$$\cos^2\tfrac{\theta}{2} = \frac{1}{1+\xi^2} \quad \text{und somit} \quad \cos\theta = 2\cos^2\tfrac{\theta}{2} - 1 = \frac{1-\xi^2}{1+\xi^2}\,.$$

Wegen $D\varphi(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}$ gilt demzufolge

$$\int_\alpha^\beta \frac{b^2 d\theta}{a + \delta\cos\theta} = \int_c^d \frac{2b^2\, d\xi}{a(1+\xi^2) + \delta(1-\xi^2)} = \int_c^d \frac{2b^2\, d\xi}{(a+\delta) + (a-\delta)\xi^2}\,.$$

3. Definiert man durch $\psi(t) = \frac{\sqrt{a+\delta}}{\sqrt{a-\delta}}\, t$ eine Skalierungstransformation $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der neuen Variablen $t \in \mathbb{R}$ in die alte Variable $\xi = \psi(t) \in \mathbb{R}$, wobei die neuen Intervallgrenzen $u, v \in \mathbb{R}$ durch $\psi(u) = c$ und $\psi(v) = d$ gegeben sind, so folgt

$$\begin{aligned} \int_c^d \frac{2b^2\, d\xi}{(a+\delta) + (a-\delta)\xi^2} &= \int_u^v \frac{2b^2\, D\psi(t)\, dt}{(a+\delta) + (a-\delta)\psi^2(t)} \\ &= \frac{2b^2\sqrt{a+\delta}}{(a+\delta)\sqrt{a-\delta}} \int_u^v \frac{dt}{1+t^2} = \frac{2b^2}{\sqrt{a^2-\delta^2}} \int_u^v \frac{dt}{1+t^2}\,. \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{u\to-\infty}\psi(u) = -\infty$ und $\lim_{v\to\infty}\psi(v) = \infty$ sowie $\lim_{c\to-\infty}\varphi(c) = -\pi$ und $\lim_{d\to\infty}\varphi(d) = \pi$ erhält man mit $b = \sqrt{a^2-\delta^2}$ und Schritt 2 insgesamt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{b^2 d\theta}{a + \delta\cos\theta} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2b^2\, d\xi}{(a+\delta) + (a-\delta)\xi^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2b\, dt}{1+t^2} = 2\pi b.$$

3. Daraus ergibt sich schließlich der integrale Mittelwert

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{b^2 d\theta}{a + \delta\cos\theta} = b$$

der Abstandsfunktion ρ über alle Polarwinkel $\theta \in [-\pi, \pi]$, mit anderen Worten, die kleine Halbachse b der Ellipse. □

Aufgabe 3. Man berechne das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{2\xi \ln(\xi)\, d\xi}{(1+\xi^2)^2}$$

durch teilweise Integration, die eine Zurückführung auf ein Integral über eine rationale Funktion ermöglicht, das durch Teilbruchzerlegung berechnet werden kann! ⑧

Lösung. 1. Seien Intervallgrenzen $a, b \in]0, \infty[$ beliebig vorgegeben. Durch teilweise Integration ergibt sich zunächst

$$\int_a^b \frac{2\xi}{(1+\xi^2)^2} \cdot \ln(\xi)\, d\xi = \frac{\ln(a)}{1+a^2} - \frac{\ln(b)}{1+b^2} + \int_a^b \frac{1}{1+\xi^2} \cdot \frac{1}{\xi}\, d\xi.$$

2. Anschließend wird der Integrand des verbleibenden Integrals in Teilbrüche zerlegt: Im Teilbruchansatz

$$\frac{1}{\xi(1+\xi^2)} = \frac{a_1}{\xi} + \frac{b_1\xi + c_1}{1+\xi^2}$$

werden drei unbekannte Koeffizienten $a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R}$ bestimmt. Für alle $\xi \in \mathbb{R}$ gilt

$$1 = a_1(1+\xi^2) + (b_1\xi + c_1)\xi,$$

woraus sich durch Koeffizientenvergleich vor Termen gleicher Ordnung in ξ die Gleichungen $a_1 = 1$, $c_1 = 0$ und $a_1 + b_1 = 0$ und somit $b_1 = -1$ ergeben. Daraus folgt die Teilbruchzerlegung

$$\frac{1}{\xi(1+\xi^2)} = \frac{1}{\xi} - \frac{\xi}{1+\xi^2} \quad \text{für alle } \xi \in]0, \infty[$$

und deshalb

$$\int_a^b \frac{d\xi}{\xi(1+\xi^2)} = \int_a^b \frac{d\xi}{\xi} - \int_a^b \frac{\xi\, d\xi}{1+\xi^2} = \ln(b) - \ln(a) - \frac{\ln(1+b^2)}{2} + \frac{\ln(1+a^2)}{2}.$$

3. Mit Schritt 1 folgt daraus für alle $a, b \in]0, \infty[$ die Beziehung

$$\int_a^b \frac{2\xi \ln(\xi)\, d\xi}{(1+\xi^2)^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{b^2}{1+b^2} - \frac{\ln(b)}{1+b^2} + \frac{\ln(1+a^2)}{2} - \frac{a^2 \ln(a)}{1+a^2}.$$

Die Grenzübergange $b \to \infty$ und $a \downarrow 0$ liefern nach Bernoulli-de l'Hospital

$$\lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{b^2}{1+b^2} - \frac{\ln(b)}{1+b^2} \right) = \frac{\ln(1)}{2} - \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2b^2} = 0$$

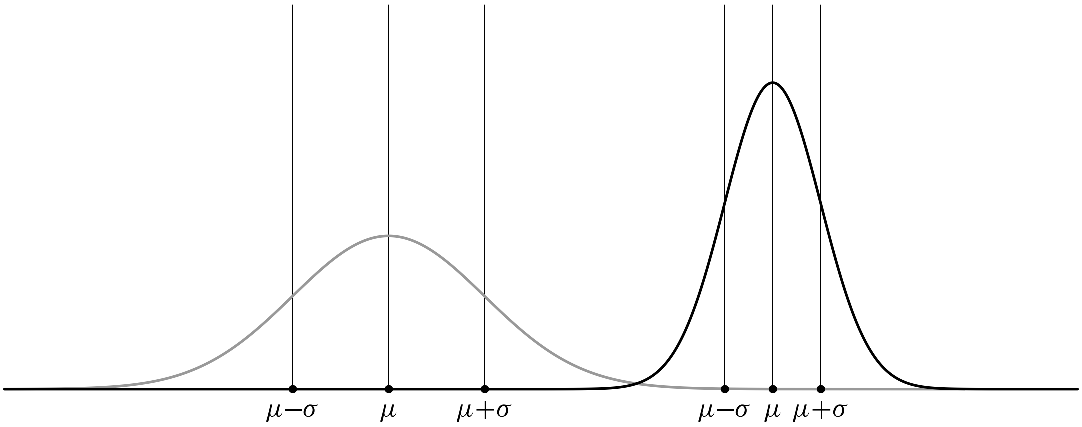
sowie

$$\lim_{a\downarrow 0} \left(\frac{\ln(1+a^2)}{2} - \frac{a^2 \ln(a)}{1+a^2} \right) = \frac{\ln(1)}{2} + \lim_{a\downarrow 0} \frac{a^2}{2} = 0$$

und somit den Wert

$$\int_0^\infty \frac{2\xi \ln(\xi)\, d\xi}{(1+\xi^2)^2} = 0$$

für das gesuchte uneigentliche Integral. □



Aufgabe 4. Man weise die Konvergenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^\infty \exp(-x^2)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

nach, woraus sich unter anderem die Normierungseigenschaft

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) d\xi = 1$$

der *Gauß-Normalverteilung* für alle Parameter $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ mit $\sigma > 0$ ergibt!

Lösung. 1. Da die Ungleichung $\exp(z) \geq 1 + z$ für alle $z \in \mathbb{R}$ und somit

$$1 - z \leq \exp(-z) \leq \frac{1}{1+z} \quad \text{für alle } z \in [0, \infty[$$

gilt, ergibt sich

$$(1-x^2)^k \leq \exp(-kx^2) \quad \text{für alle } x \in [0,1] \text{ und } k \in \mathbb{N}$$

sowie

$$\exp(-kx^2) \leq \frac{1}{(1+x^2)^k} \quad \text{für alle } x \in [0,\infty[\text{ und } k \in \mathbb{N}.$$

Die Multiplikation mit $\sqrt{k}$ und die Integration von 0 bis 1 bzw. von 0 bis ∞ liefern für jedes $k \in \mathbb{N}$ aufgrund des Majorantenkriteriums die Abschätzung

$$\begin{aligned}\sqrt{k}\int_0^1 (1-x^2)^k dx \leq \sqrt{k}\int_0^1 \exp(-kx^2)\,dx = \int_0^{\sqrt{k}} \exp(-\xi^2)\,d\xi \\ \leq \int_0^\infty \exp(-\xi^2)\,d\xi = \sqrt{k}\int_0^\infty \exp(-kx^2)\,dx \leq \sqrt{k}\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^k}\,.\end{aligned}$$

2. Zur Berechnung des Integrals $\int_0^1 (1-x^2)^k \, dx$ eignet sich die durch $\varphi(\theta) = \cos\theta$ definierte Transformation $\varphi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0,1]$ der neuen Variablen $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ nach x. Für die Intervallgrenzen $1 = \varphi(0)$ sowie $0 = \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-x^2)^k \, dx &= \int_{\pi/2}^0 (1-\varphi^2(\theta))^k \, D\varphi(\theta) \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2\theta)^k \sin\theta \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^{2k+1}\theta \, d\theta = \prod_{\ell=1}^{k} \frac{2\ell}{2\ell+1} \,.\end{aligned}$$

3. Zur Bestimmung des zweiten Integrals $\int_0^\infty (1+x^2)^{-k} \, dx$ definiert man durch $\psi(\theta) = \cot\theta$ eine geeignete Transformation $\psi : \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0, \infty[$ der neuen Variablen $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ nach x. Für die Intervallgrenzen $0 = \psi\left(\frac{\pi}{2}\right)$ und $b = \psi(\beta)$ mit $\beta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ ergibt sich für jedes $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ die Beziehung

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^k} &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{(1+x^2)^k} = \lim_{\beta\downarrow 0} \int_{\pi/2}^{\beta} \frac{D\psi(\theta) \, d\theta}{(1+\psi^2(\theta))^k} \\ &= \lim_{\beta\downarrow 0} \int_\beta^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1+\cot^2\theta)^{k-1}} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2(k-1)}\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2} \prod_{\ell=1}^{k-1} \frac{2\ell-1}{2\ell} \,.\end{aligned}$$

4. Die Schritte 1, 2 und 3 liefern für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \prod_{\ell=1}^{k} \frac{2\ell}{2\ell-1} &= \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{\pi}} \prod_{\ell=1}^{k} \frac{2\ell}{2\ell+1} \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp(-x^2) \, dx \\ &\leq \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2} \prod_{\ell=1}^{k-1} \frac{2\ell-1}{2\ell} = \frac{2k}{2k-1} \cdot \sqrt{\pi k} \prod_{\ell=1}^{k} \frac{2\ell-1}{2\ell}\end{aligned}$$

und damit wegen der Grenzwertbeziehung

$$\lim_{k\to\infty} \pi k \prod_{\ell=1}^{k} \frac{(2\ell-1)^2}{(2\ell)^2} = 1 \quad \text{schließlich} \quad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp(-x^2) \, dx = 1$$

nach Ausführung des Grenzprozesses $k \to \infty$. □

Aufgabe 5. Zum Nachweis der Existenz und der Berechnung des Werts des uneigentlichen Integrals $P_k = \int_0^\infty e^{-t} t^k \, dt$ für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gehe man wie folgt vor: Man zeige mittels teilweiser Integration und vollständiger Induktion, daß die Rekursionsformel

$$P_0 = 1, \quad P_{k+1} = (k+1) P_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

gilt und schließe daraus auf den Wert $P_k = k!$ des Integrals für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$!

Lösung. Der Nachweis wird durch vollständige Induktion über $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ geführt:

Induktionsanfang: Im Falle $k = 0$ ergibt sich unmittelbar das Grundintegral

$$P_0 = \int_0^\infty e^{-t} \, dt = \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-t} \, dt = \lim_{b \to \infty} \left(1 - e^{-b}\right) = 1.$$

Induktionsschritt: Unter der Annahme, daß die Induktionsvoraussetzung für einen Index $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ erfüllt ist, also $P_k = k!$ gilt, soll durch den Nachweis der Rekursionsformel $P_{k+1} = (k+1) P_k$ gezeigt werden, daß $P_{k+1} = (k+1)!$ gilt:

Für alle $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$ erhält man durch teilweise Integration

$$\int_0^b e^{-t} \cdot t^{k+1} \, dt = \int_0^b e^{-t} \cdot (k+1) \, t^k \, dt - e^{-b} b^{k+1}$$

und im Grenzprozeß $b \to \infty$ wegen $\lim_{b \to \infty} e^{-b} b^{k+1} = 0$ die Konvergenzbeziehung

$$\lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-t} t^{k+1} \, dt = (k+1) \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-t} t^k \, dt = (k+1) P_k,$$

woraus die Induktionsbehauptung $P_{k+1} = (k+1) P_k = (k+1) k! = (k+1)!$ folgt. $\square$

Aufgabe 6. Man berechne für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ das uneigentliche Integral

$$\int_a^b \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - a)(b - \xi)}}$$

mit Hilfe einer geeigneten Variablentransformation!

Lösung. Führt man die Parameter $\delta = \frac{1}{2}(b-a) > 0$ und $y = \frac{1}{2}(b+a) \in \mathbb{R}$ ein, dann gilt $y - \delta = a$ und $y + \delta = b$, und man erhält zunächst folgendes Integral

$$\int_a^b \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - a)(b - \xi)}} = \int_a^b \frac{d\xi}{\sqrt{\delta^2 - (\xi - y)^2}}\,.$$

Zur Berechnung dieses Integrals definiert man durch $\varphi(\theta) = y + \delta \sin\theta$ die Transformation $\varphi : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to]a, b[$ der neuen Variable $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ nach $\xi \in]a, b[$. Für die neuen Intervallgrenzen $\alpha, \beta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ liefert die Transformationsformel somit

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \frac{d\xi}{\sqrt{\delta^2 - (\xi - y)^2}} = \int_\alpha^\beta \frac{D\varphi(\theta)\, d\theta}{\sqrt{\delta^2 - (\varphi(\theta) - y)^2}} = \int_\alpha^\beta \frac{\delta \cos\theta\, d\theta}{\sqrt{\delta^2 \cos^2\theta}} = \beta - \alpha.$$

Wegen $\lim_{\alpha\downarrow -\pi/2} \varphi(\alpha) = a$ und $\lim_{\beta\uparrow \pi/2} \varphi(\beta) = b$ folgt daraus der Wert

$$\int_a^b \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - a)(b - \xi)}} = \pi$$

des gesuchten Integrals unabhängig von der Wahl von $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. □

Aufgabe 7. Man weise nach, daß das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{\ln(\xi)}{1+\xi^2}\,d\xi = \int_0^1 \frac{\ln(\xi)}{1+\xi^2}\,d\xi + \int_1^\infty \frac{\ln(\xi)}{1+\xi^2}\,d\xi$$

existiert und bestimme seinen Wert, indem man eines der Integrale auf der rechten Seite mit Hilfe einer geeigneten Transformation der Variablen auf das andere Integral zurückführt!

Lösung. Um einzusehen, daß die beiden uneigentlichen Integrale auf der rechten Seite als Grenzwerte existieren, wird das Majorantenkriterium herangezogen:

1. Für das erste Integral gilt für alle $a \in]0,1[$ die Abschätzung

$$\int_a^1 \frac{|\ln(\xi)|\,d\xi}{1+\xi^2} \le \int_a^1 |\ln(\xi)|\,d\xi = -\int_a^1 \ln(\xi)\,d\xi$$
$$= a\ln(a) + \int_a^1 1\,d\xi = a\ln(a) + 1 - a.$$

Wegen $\lim_{a\downarrow 0}(a\ln(a)+1-a) = 1$ gilt $\lim_{a\downarrow 0}\int_a^1 |\ln(\xi)|\,d\xi = 1$ und somit

$$\left|\int_0^1 \frac{\ln(\xi)\,d\xi}{1+\xi^2}\right| \le \int_0^1 \frac{|\ln(\xi)|\,d\xi}{1+\xi^2} \le \int_0^1 |\ln(\xi)|\,d\xi = 1.$$

2. Sei ferner $b \in]1,\infty[$ vorgegeben. Definiert man durch $\varphi(t) = \frac{1}{t}$ die Transformation $\varphi :]0,1] \to [1,\infty[$ der neuen Variablen $t \in]0,1]$ nach $\xi \in [1,\infty[$, dann liefert die Transformationsformel wegen $\varphi(1) = 1$ und $\varphi\left(\frac{1}{b}\right) = b$ für das zweite Integral

$$\int_1^b \frac{\ln(\xi)\,d\xi}{1+\xi^2} = \int_1^{1/b} \frac{\ln(\varphi(t))\,D\varphi(t)\,dt}{1+\varphi^2(t)} = -\int_{1/b}^1 \frac{\ln(t)\,dt}{1+t^2}\,.$$

Da nach Schritt 1 der Grenzwert des letzten Integrals für $b \to \infty$ existiert, ergibt sich

$$\int_1^\infty \frac{\ln(\xi)\,d\xi}{1+\xi^2} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\ln(\xi)\,d\xi}{1+\xi^2} = -\lim_{b\to\infty}\int_{1/b}^1 \frac{\ln(t)\,dt}{1+t^2} = -\int_0^1 \frac{\ln(t)\,dt}{1+t^2}$$

und somit schließlich

$$\int_0^\infty \frac{\ln(\xi)\,d\xi}{1+\xi^2} = \int_0^1 \frac{\ln(\xi)\,d\xi}{1+\xi^2} + \int_1^\infty \frac{\ln(\xi)\,d\xi}{1+\xi^2} = 0$$

für das gesuchte uneigentliche Integral. $\square$

Aufgabe 8. Sei eine Längeneinheit $\delta > 0$, die Funktion $\rho : \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[\to \mathbb{R}$ mittels

$$\rho(t) = \frac{3\delta \sin t \cos t}{\sin^3 t + \cos^3 t} \quad \text{für } t \in \left]-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{3\pi}{4}\right[$$

und das *Kartesische Blatt* durch die Funktion $s : \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[\to \mathbb{C}$ in Polarkoordinaten

$$s(t) = \rho(t)(\cos t, \sin t) \quad \text{für } t \in \left]-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{3\pi}{4}\right[\text{ vorgegeben.}$$

1. Man berechne den Flächeninhalt jener Teilmenge der Ebene, welche von der Schleife $\left\{s(t) \in \mathbb{C} \mid t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$ des Kartesischen Blattes umschlungen wird!

2. Man bestimme den Flächeninhalt derjenigen Teilmenge der Ebene, welche von der Asymptote und den Bögen $\left\{s(t) \in \mathbb{C} \mid t \in \left]-\frac{\pi}{4}, 0\right]\right\}$ und $\left\{s(t) \in \mathbb{C} \mid t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right[\right\}$ des Kartesischen Blattes eingeschlossen wird!

Lösung. 1. Jene Fläche, die von der Schleife $\left\{s(t) \in \mathbb{C} \mid t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$ des Kartesischen Blattes umschlungen wird, hat gemäß der Leibniz-Sektorformel den Inhalt

$$F_S = \int_0^{\pi/2} \frac{\rho^2(t)\, dt}{2} = \frac{9\delta^2}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t \cos^2 t \, dt}{(\sin^3 t + \cos^3 t)^2} .$$

Da die durch die Vorschrift

$$f(t) = \frac{\cos^3 t}{\sin^3 t + \cos^3 t} \quad \text{für } t \in \left]-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{3\pi}{4}\right[$$

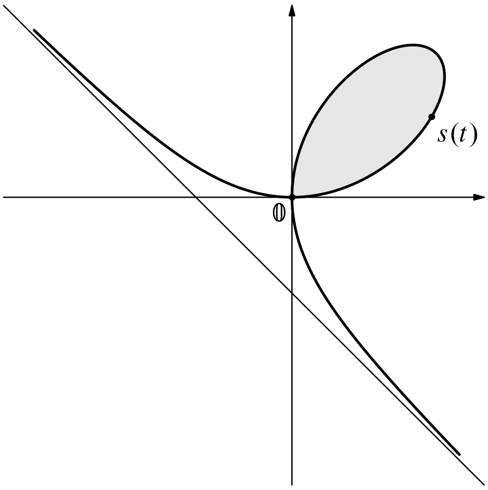
definierte Funktion $f : \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[\to \mathbb{R}$ die Ableitung

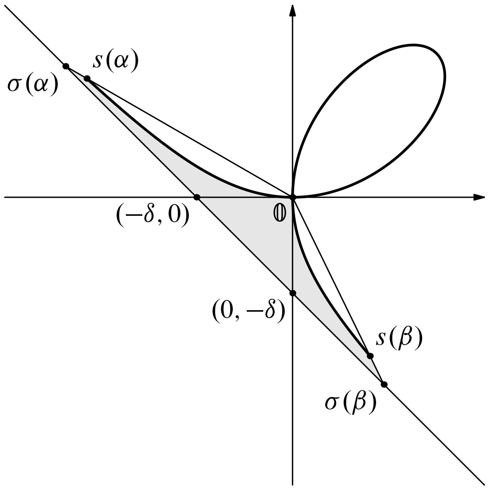
$$\begin{aligned} Df(t) &= -\frac{3 \sin t \cos^2 t \cdot (\sin^3 t + \cos^3 t) + \cos^3 t \cdot (3 \cos t \sin^2 t - 3 \sin t \cos^2 t)}{(\sin^3 t + \cos^3 t)^2} \\ &= -\frac{3 \sin^2 t \cos^2 t \cdot (\sin^2 t + \cos^2 t)}{(\sin^3 t + \cos^3 t)^2} = -\frac{3 \sin^2 t \cos^2 t}{(\sin^3 t + \cos^3 t)^2} \end{aligned}$$

besitzt, hat man eine Stammfunktion des Integranden in der Hand und erhält

$$F_S = \frac{3\delta^2\left(f(0) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}{2} = \frac{3\delta^2}{2}$$

als Inhalt der Fläche, die von der Schleife $\left\{s(t) \in \mathbb{C} \mid t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$ des Kartesischen Blattes eingeschlossen wird.





2. Seien neben dem Nullpunkt $\mathbb{0} \in \mathbb{C}$ durch $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{4}, 0\right[$ sowie $\beta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right[$ zwei weitere Eckpunkte

$$\sigma(\alpha) = \frac{(-\delta\cos\alpha, -\delta\sin\alpha)}{\sin\alpha + \cos\alpha} \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad \sigma(\beta) = \frac{(-\delta\cos\beta, -\delta\sin\beta)}{\sin\beta + \cos\beta} \in \mathbb{C}$$

eines Dreiecks auf der Asymptote des Kartesischen Blattes vorgegeben. Aus diesem Dreieck wird durch die Bögen $\left\{s(t) \in \mathbb{C} \mid t \in \left]-\frac{\pi}{4}, 0\right]\right\}$ und $\left\{s(t) \in \mathbb{C} \mid t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right[\right\}$ des Kartesisches Blattes gemäß der Leibniz-Sektorformel eine Fläche mit dem Inhalt

$$F_A(\alpha, \beta) = \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{\sin\beta}{\sin\beta + \cos\beta} - \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}\right) - \int_\alpha^0 \frac{\rho^2(t)\,dt}{2} - \int_{\pi/2}^\beta \frac{\rho^2(t)\,dt}{2}$$

herausgeschnitten. Mit Hilfe der Stammfunktion f ergibt sich daraus der Wert

$$\begin{aligned} F_A(\alpha, \beta) &= \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{\tan\beta}{1 + \tan\beta} - \frac{\tan\alpha}{1 + \tan\alpha}\right) - \frac{3\delta^2\big(f(\alpha) - f(0)\big)}{2} - \frac{3\delta^2\big(f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(\beta)\big)}{2} \\ &= \frac{3\delta^2}{2} + \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{\tan\beta}{1 + \tan\beta} - \frac{\tan\alpha}{1 + \tan\alpha}\right) + \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{3}{1 + \tan^3\beta} - \frac{3}{1 + \tan^3\alpha}\right). \end{aligned}$$

Da für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ die Beziehung

$$\frac{x}{1 + x} + \frac{3}{1 + x^3} = \frac{x(1 - x + x^2) + 3}{(1 + x)(1 - x + x^2)} = \frac{(1 + x)(3 - 2x + x^2)}{(1 + x)(1 - x + x^2)} = \frac{3 - 2x + x^2}{1 - x + x^2}$$

gilt, erhält man somit

$$F_A(\alpha, \beta) = \frac{3\delta^2}{2} + \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{3 - 2\tan\beta + \tan^2\beta}{1 - \tan\beta + \tan^2\beta} - \frac{3 - 2\tan\alpha + \tan^2\alpha}{1 - \tan\alpha + \tan^2\alpha}\right)$$

und wegen $\lim_{\alpha\downarrow-\pi/4} \tan\alpha = \lim_{\beta\uparrow 3\pi/4} \tan\beta = -1$ schließlich den Flächeninhalt

$$\lim_{\beta\uparrow 3\pi/4}\lim_{\alpha\downarrow-\pi/4} F_A(\alpha, \beta) = \frac{3\delta^2}{2}$$

jener Teilmenge, welche von der Asymptote und den Bögen $\left\{s(t) \in \mathbb{C} \mid t \in \left]-\frac{\pi}{4}, 0\right]\right\}$ und $\left\{s(t) \in \mathbb{C} \mid t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right[\right\}$ des Kartesischen Blattes eingeschlossen wird. □