Übungsaufgaben 13

Kurven und Wege in der Ebene

Aufgabe 1. Sei ein Parameter $\delta > 0$ gegeben und der uneigentliche Weg $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ längs einer *Kettenlinie* mittels

$$\gamma(t) = \left(t, \delta \cosh \tfrac{t}{\delta}\right) \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \text{ definiert.}$$

1. Wird die Längenfunktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des uneigentlichen Weges γ durch

$$\varphi(t) = \int_0^t |D\gamma(s)|\, ds \in \mathbb{R} \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \text{ gegeben,}$$

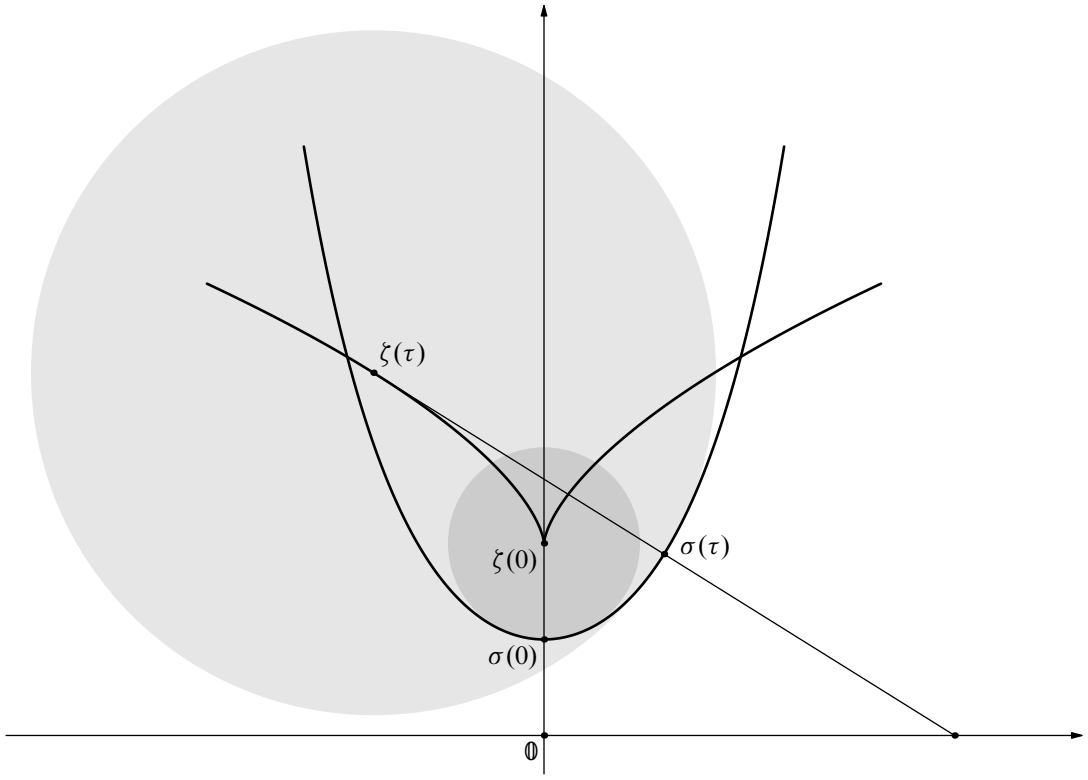
so bestimme man den durch Verkettung $\gamma = \sigma \circ \varphi$ definierten und nach seiner Länge parametrisierten uneigentlichen Weg $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ entlang der Kettenlinie!

2. Man berechne die Krümmung $\kappa(\tau) \in \mathbb{R}$ des uneigentlichen Weges σ sowie den Mittelpunkt $\zeta(\tau) \in \mathbb{C}$ des Krümmungskreises an σ in $\tau \in \mathbb{R}$!

3. Man zeige, daß der uneigentliche Weg $\zeta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der Krümmungsmittelpunkte differenzierbar ist und für jedes $\tau \in \mathbb{R}$ stets ein Faktor $\lambda(\tau) \in \mathbb{R}$ mit

$$D\zeta(\tau) = \lambda(\tau)\big(\zeta(\tau) - \sigma(\tau)\big) \quad \text{existiert!}$$

4. Man überzeuge sich davon, daß die Weglängen für jedes $\tau \in \mathbb{R}$ die Beziehung $|\zeta(\tau) - \sigma(\tau)| = \delta + \left|\int_0^\tau |D\zeta(t)|\, dt\right|$ erfüllen! ⑧



Lösung. 1. Aus der Ableitung $D\gamma(s) = \big(1, \sinh \frac{s}{\delta}\big) \in \mathbb{C}$ von γ in $s \in \mathbb{R}$ ergibt sich wegen des Additionstheorems $\cosh^2\big(\frac{s}{\delta}\big) = 1 + \sinh^2\big(\frac{s}{\delta}\big)$ für $t \in \mathbb{R}$ der Wert

$$\tau = \varphi(t) = \int_0^t |D\gamma(s)|\, ds = \int_0^t \cosh \tfrac{s}{\delta}\, ds = \delta \sinh \tfrac{t}{\delta}$$

der Längenfunktion des uneigentlichen Weges γ längs der Kettenlinie. Nutzt man die streng monoton wachsende und bijektive Transformation $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so wird durch die Verkettung $\gamma = \sigma \circ \varphi$ ein nach seiner Länge parametrisierter uneigentlicher Weg $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ entlang der Kettenlinie definiert: Der Wert

$$t = \varphi^{-1}(\tau) = \delta \operatorname{arsinh} \tfrac{\tau}{\delta} \quad \text{für } \tau \in \mathbb{R}$$

der inversen Funktion liefert wegen $\cosh^2\big(\frac{t}{\delta}\big) = 1 + \sinh^2\big(\frac{t}{\delta}\big) = 1 + \big(\frac{\tau}{\delta}\big)^2$ demnach

$$\sigma(\tau) = \gamma(t) = \big(t, \delta \cosh \tfrac{t}{\delta}\big) = \big(\delta \operatorname{arsinh} \tfrac{\tau}{\delta}, \sqrt{\delta^2 + \tau^2}\big) \in \mathbb{C} \quad \text{für } \tau \in \mathbb{R}$$

und somit einen unendlichmal differenzierbaren uneigentlichen Weg $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

2. Da die erste und zweite Ableitung von σ in $\tau \in \mathbb{R}$ durch

$$D\sigma(\tau) = \frac{(\delta, \tau)}{\sqrt{\delta^2 + \tau^2}} \quad \text{sowie} \quad D^2\sigma(\tau) = \frac{(-\delta\tau, \delta^2)}{(\delta^2 + \tau^2)\sqrt{\delta^2 + \tau^2}}$$

gegeben sind, erhält man aus der Beziehung $D^2\sigma(\tau) = \kappa(\tau) \cdot \mathbb{i}\, D\sigma(\tau)$ zunächst

$$\frac{\delta(-\tau, \delta)}{(\delta^2 + \tau^2)\sqrt{\delta^2 + \tau^2}} = \frac{\kappa(\tau)(-\tau, \delta)}{\sqrt{\delta^2 + \tau^2}} \quad \text{und somit} \quad \kappa(\tau) = \frac{\delta}{\delta^2 + \tau^2} \in \mathbb{R}$$

als Krümmung des uneigentlichen Weges σ in $\tau \in \mathbb{R}$, woraus sich der Mittelpunkt

$$\zeta(\tau) = \sigma(\tau) + \frac{\mathbb{i}\, D\sigma(\tau)}{\kappa(\tau)} = \big(\delta \operatorname{arsinh} \tfrac{\tau}{\delta} - \tfrac{\tau}{\delta}\sqrt{\delta^2 + \tau^2}, 2\sqrt{\delta^2 + \tau^2}\big) \in \mathbb{C}$$

des Krümmungskreises an σ in $\tau \in \mathbb{R}$ ergibt. Kehrt man durch $\tau = \varphi(t) = \delta \sinh \frac{t}{\delta}$ zum ursprünglichen Parameter $t \in \mathbb{R}$ zurück, so erhält man die Darstellung

$$\kappa(\varphi(t)) = \frac{1}{\delta \cosh^2\big(\frac{t}{\delta}\big)} \in \mathbb{R} \quad \text{sowie} \quad \zeta(\varphi(t)) = \big(t - \delta \sinh \tfrac{t}{\delta} \cosh \tfrac{t}{\delta}, 2\delta \cosh \tfrac{t}{\delta}\big) \in \mathbb{C}.$$

3. Der differenzierbare uneigentliche Weg $\zeta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ besitzt in $\tau \in \mathbb{R}$ die Ableitung

$$D\zeta(\tau) = \left(\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + \tau^2}} - \frac{\sqrt{\delta^2 + \tau^2}}{\delta} - \frac{\tau^2}{\delta\sqrt{\delta^2 + \tau^2}}, \frac{2\tau}{\sqrt{\delta^2 + \tau^2}}\right) = \frac{2\tau\big(-\frac{\tau}{\delta}, 1\big)}{\sqrt{\delta^2 + \tau^2}}.$$

Da für die Differenz $\zeta(\tau) - \sigma(\tau) = \sqrt{\delta^2 + \tau^2}\,\big(-\frac{\tau}{\delta}, 1\big)$ gilt, folgt daraus sowohl

$$D\zeta(\tau) = \frac{2\tau}{\delta^2 + \tau^2} \cdot \big(\zeta(\tau) - \sigma(\tau)\big) \quad \text{als auch} \quad \left|\int_0^\tau |D\zeta(t)|\, dt\right| = \left|\int_0^\tau \frac{|2t|\, dt}{\delta}\right| = \frac{\tau^2}{\delta}$$

für jedes $\tau \in \mathbb{R}$ und schließlich die Beziehung $|\zeta(\tau) - \sigma(\tau)| = \delta + \big|\int_0^\tau |D\zeta(t)|\, dt\big|$ für die Weglängen. $\square$

Aufgabe 2. Sei ein Radius $\delta > 0$ und die Funktion $\kappa :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ durch

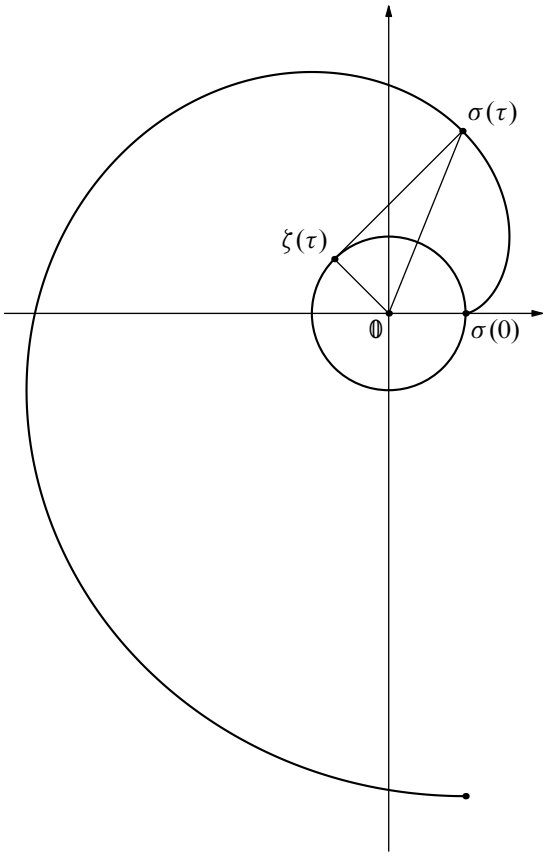
$$\kappa(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\delta\tau}} \quad \text{für } \tau \in]0, \infty[\text{ gegeben.}$$

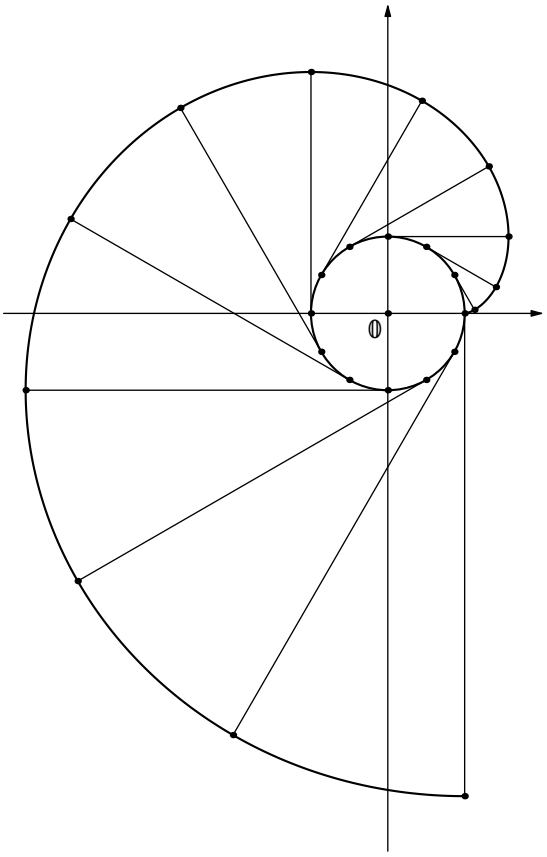
1. Man bestimme den durch

$$\theta(\tau) = \int_0^\tau \kappa(t)\,dt, \quad v(\tau) = (\cos\theta(\tau), \sin\theta(\tau)) \quad \text{und} \quad \sigma(\tau) = (\delta, 0) + \int_0^\tau v(t)\,dt$$

für $\tau \in]0, \infty[$ definierten *uneigentlichen* Weg $\sigma :]0, \infty[\to \mathbb{C}$, welcher nach seiner Länge parametrisiert ist und in jedem Punkt $\tau \in]0, \infty[$ die Krümmung $\kappa(\tau)$ besitzt!

2. Man berechne in jedem Punkt $\tau \in]0, \infty[$ jeweils den Mittelpunkt $\zeta(\tau) \in \mathbb{C}$ des Krümmungskreises an σ und zeige, daß der uneigentliche Weg $\zeta :]0, \infty[\to \mathbb{C}$ dieser Krümmungsmittelpunkte längs einer *Kreislinie* mit dem Radius $\delta > 0$ verläuft! ⑥





Lösung. 1.1. Das uneigentliche Integral zur Berechung des Richtungswinkels läßt sich mit Hilfe eines Grundintegrals bestimmen: Man erhält

$$\theta(\tau) = \int_0^\tau \frac{dt}{\sqrt{2\delta t}} = \lim_{a\downarrow 0} \int_a^\tau \frac{dt}{\sqrt{2\delta t}} = \lim_{a\downarrow 0} \frac{\sqrt{2\tau} - \sqrt{2a}}{\sqrt{\delta}} = \frac{\sqrt{2\tau}}{\sqrt{\delta}} \quad \text{für } \tau \in \,]0,\infty[.$$

1.2. Die Gestalt der Ableitung $D\theta = \kappa$ der Transformation $\theta :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ und die Beziehung $\delta\theta(t) \cdot \kappa(t) = 1$ liefern für jedes $\tau \in]0,\infty[$ sowohl

$$\begin{aligned}\int_0^\tau \cos\theta(t)\,dt &= \int_0^\tau \delta\theta(t)\cos\theta(t)\cdot\kappa(t)\,dt = \int_0^\tau \delta\theta(t)\cos\theta(t)\cdot D\theta(t)\,dt \\ &= \int_0^{\theta(\tau)} \delta\vartheta\cdot\cos\vartheta\,d\vartheta = \delta\theta(\tau)\sin\theta(\tau) - \int_0^{\theta(\tau)} \delta\sin\vartheta\,d\vartheta\end{aligned}$$

und somit

$$\delta + \int_0^\tau \cos\theta(t)\,dt = \delta\cos\theta(\tau) + \delta\theta(\tau)\sin\theta(\tau)$$

als auch

$$\begin{aligned}\int_0^\tau \sin\theta(t)\,dt &= \int_0^\tau \delta\theta(t)\sin\theta(t)\cdot\kappa(t)\,dt = \int_0^\tau \delta\theta(t)\sin\theta(t)\cdot D\theta(t)\,dt \\ &= \int_0^{\theta(\tau)} \delta\vartheta\cdot\sin\vartheta\,d\vartheta = -\delta\theta(\tau)\cos\theta(\tau) + \int_0^{\theta(\tau)} \delta\cos\vartheta\,d\vartheta\end{aligned}$$

und damit

$$\int_0^\tau \sin\theta(t)\,dt = \delta\sin\theta(\tau) - \delta\theta(\tau)\cos\theta(\tau),$$

also insgesamt für den uneigentlichen Weg $\sigma :]0,\infty[\to \mathbb{C}$ die Darstellung

$$\sigma(\tau) = (\delta, 0) + \int_0^\tau v(t)\,dt = \delta\big(\cos\theta(\tau) + \theta(\tau)\sin\theta(\tau), \sin\theta(\tau) - \theta(\tau)\cos\theta(\tau)\big).$$

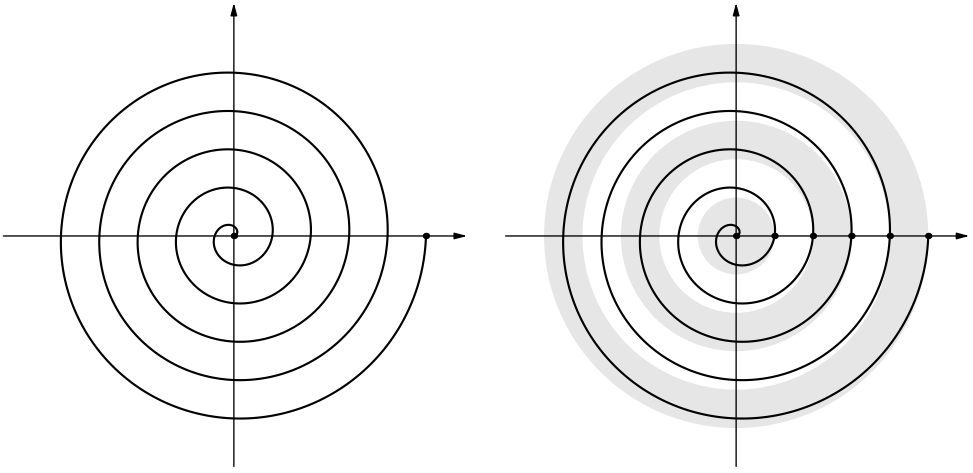
2. Wegen $D\sigma = v$ ergibt sich für den Mittelpunkt des Krümmungskreises an σ in einem beliebigen Punkt $\tau \in]0,\infty[$ zunächst

$$\zeta(\tau) = \sigma(\tau) + \frac{\mathrm{i}\,D\sigma(\tau)}{\kappa(\tau)} = \sigma(\tau) + \frac{\mathrm{i}\,v(\tau)}{\kappa(\tau)} = \sigma(\tau) + \frac{\big(-\sin\theta(\tau), \cos\theta(\tau)\big)}{\kappa(\tau)}$$

und somit aufgrund der Ergebnisse von Schritt 1 schließlich die Darstellung

$$\begin{aligned}\zeta(\tau) &= \delta\big(\cos\theta(\tau) + \theta(\tau)\sin\theta(\tau), \sin\theta(\tau) - \theta(\tau)\cos\theta(\tau)\big) \\ &\quad + \delta\theta(\tau)\cdot\big(-\sin\theta(\tau), \cos\theta(\tau)\big) \\ &= \delta(\cos\theta(\tau), \sin\theta(\tau)) = \delta v(\tau).\end{aligned}$$

Demnach verläuft der uneigentliche Weg $\zeta :]0,\infty[\to \mathbb{C}$ der Krümmungsmittelpunkte von σ entlang einer Kreislinie um den Nullpunkt mit dem Radius $\delta > 0$. $\square$



Aufgabe 3. Welche Länge hat der durch

$$\gamma(t) = \delta t \operatorname{Exp}(2\pi \mathbb{i} t) = \delta t(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \in \mathbb{C} \quad \text{für } t \in [0, n]$$

gegebene Weg $\gamma : [0, n] \to \mathbb{C}$ längs der *Archimedischen Spirale* mit $n \in \mathbb{N}$ Windungen, welche jeweils den Abstand $\delta > 0$ voneinander haben? ⑥

Lösung. 1. Nach Definition hat der vorgegebene Weg γ die Länge

$$\begin{aligned}\int_0^n |D\gamma(t)|\, dt &= \int_0^n \delta\, |\operatorname{Exp}(2\pi \mathbb{i} t) + 2\pi \mathbb{i} t \operatorname{Exp}(2\pi \mathbb{i} t)|\, dt = \int_0^n \delta\, |\mathbb{1} + 2\pi \mathbb{i} t|\, dt \\ &= \int_0^n \delta \sqrt{1 + (2\pi t)^2}\, dt = \frac{\delta}{2\pi} \int_0^{2\pi n} \sqrt{1 + s^2}\, ds.\end{aligned}$$

Durch teilweise Integration ergibt sich zunächst

$$\int_0^{2\pi n} 1 \cdot \sqrt{1 + s^2}\, ds = 2\pi n \sqrt{1 + (2\pi n)^2} - \int_0^{2\pi n} s \cdot \frac{s}{\sqrt{1 + s^2}}\, ds.$$

2. Das letzte Integral wird auf das gesuchte und ein Grundintegral zurückgeführt:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi n} \frac{s^2 ds}{\sqrt{1 + s^2}} &= \int_0^{2\pi n} \frac{(1 + s^2)\, ds}{\sqrt{1 + s^2}} - \int_0^{2\pi n} \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2}} \\ &= \int_0^{2\pi n} \sqrt{1 + s^2}\, ds - \operatorname{arsinh} 2\pi n.\end{aligned}$$

Mit Schritt 1 folgt daraus

$$\int_0^{2\pi n} \sqrt{1 + s^2}\, ds = 2\pi n \sqrt{1 + (2\pi n)^2} - \int_0^{2\pi n} \sqrt{1 + s^2}\, ds + \operatorname{arsinh} 2\pi n.$$

Somit ergibt sich schließlich die Länge

$$\int_0^n |D\gamma(t)|\, dt = \frac{\delta}{2\pi} \int_0^{2\pi n} \sqrt{1 + s^2}\, ds = \frac{\delta n \sqrt{1 + (2\pi n)^2}}{2} + \frac{\delta \operatorname{arsinh} 2\pi n}{4\pi}$$

der *Archimedischen Spirale* mit $n \in \mathbb{N}$ Windungen, welche jeweils den Abstand $\delta > 0$ voneinander haben. □

Aufgabe 4. Sei ein Parameter $\delta > 0$ gegeben und der uneigentliche Weg $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ entlang einer *Schleppkurve* mittels

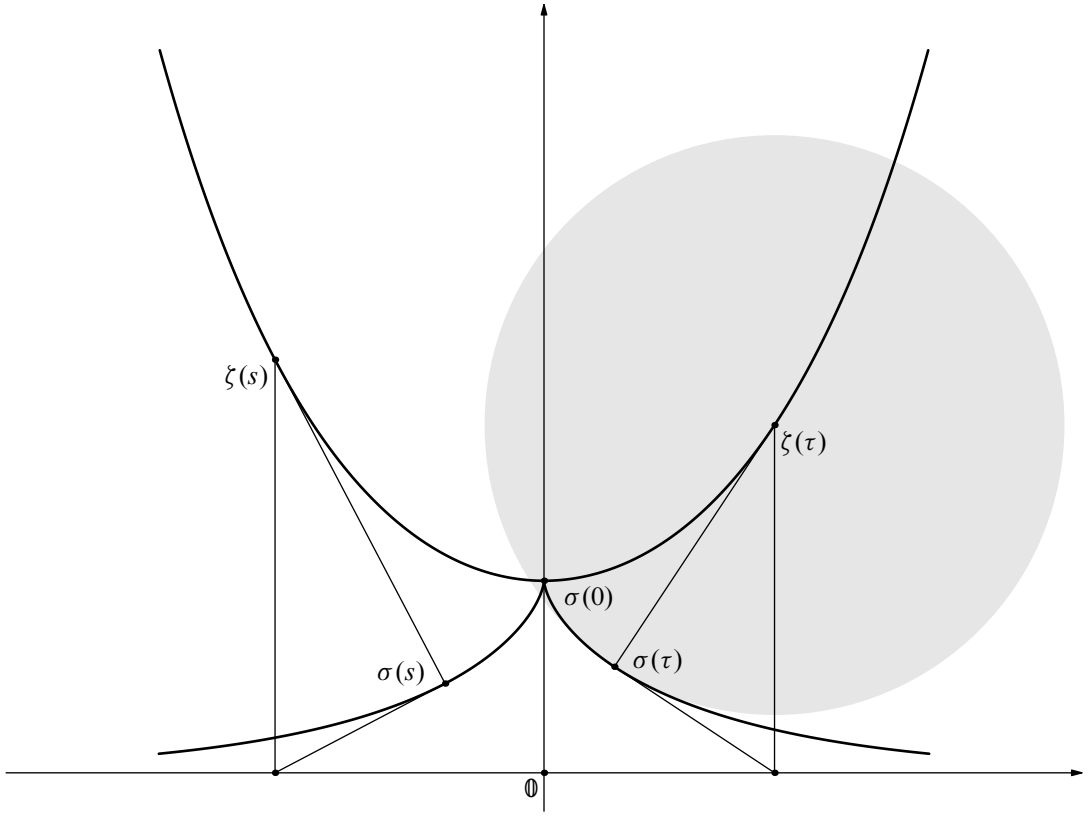
$$\gamma(t) = \left(t - \frac{\delta \sinh \frac{t}{\delta}}{\cosh \frac{t}{\delta}}, \frac{\delta}{\cosh \frac{t}{\delta}} \right) \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \text{ definiert.}$$

1. Wird die Längenfunktion $\varphi : [0, \infty[\to [0, \infty[$ des uneigentlichen Weges γ durch

$$\varphi(t) = \int_0^t |D\gamma(s)| \, ds \in \mathbb{R} \quad \text{für } t \in [0, \infty[\text{ eingeführt,}$$

so bilde man den durch Verkettung $\gamma = \sigma \circ \varphi$ gegebenen und nach seiner Länge parametrisierten uneigentlichen Weg $\sigma : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ längs der Schleppkurve!

2. Man berechne die Krümmung $\kappa(\tau) \in \mathbb{R}$ des uneigentlichen Weges σ sowie den Mittelpunkt $\zeta(\tau) \in \mathbb{C}$ des Krümmungskreises an σ in $\tau \in]0, \infty[$ und zeige, daß der uneigentliche Weg $\zeta \circ \varphi :]0, \infty[\to \mathbb{C}$ der Krümmungsmittelpunkte längs einer *Kettenlinie* verläuft!



Lösung. 1. Aus der Gestalt der Ableitung

$$D\gamma(s) = \left(1 - \frac{\cosh^2\left(\frac{s}{\delta}\right) - \sinh^2\left(\frac{s}{\delta}\right)}{\cosh^2\left(\frac{s}{\delta}\right)}, -\frac{\sinh\frac{s}{\delta}}{\cosh^2\left(\frac{s}{\delta}\right)}\right) = \frac{\sinh\frac{s}{\delta}}{\cosh\frac{s}{\delta}}\left(\frac{\sinh\frac{s}{\delta}}{\cosh\frac{s}{\delta}}, -\frac{1}{\cosh\frac{s}{\delta}}\right)$$

von γ in $s \in \mathbb{R}$ folgt wegen des Additionstheorems $\cosh^2\left(\frac{s}{\delta}\right) - \sinh^2\left(\frac{s}{\delta}\right) = 1$ für die Länge des uneigentlichen Weges γ längs der Schleppkurve die Beziehung

$$\tau = \varphi(t) = \int_0^t |D\gamma(s)|\, ds = \int_0^t \frac{\sinh\frac{s}{\delta}}{\cosh\frac{s}{\delta}}\, ds = \delta \ln\left(\cosh\tfrac{t}{\delta}\right) \quad \text{für } t \in [0, \infty[.$$

Mit der bijektiven, streng monoton wachsenden Transformation $\varphi : [0, \infty[\to [0, \infty[$ wird durch die Verkettung $\gamma = \sigma \circ \varphi$ ein nach seiner Länge parametrisierter uneigentlicher Weg $\sigma : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ entlang der Schleppkurve definiert: Der Wert

$$t = \varphi^{-1}(\tau) = \delta \operatorname{arcosh}\left(\mathrm{e}^{\tau/\delta}\right) \quad \text{für } \tau \in [0, \infty[$$

der inversen Funktion liefert wegen $\sinh^2\left(\frac{t}{\delta}\right) = \cosh^2\left(\frac{t}{\delta}\right) - 1 = \mathrm{e}^{2\tau/\delta} - 1$ demnach

$$\sigma(\tau) = \gamma(t) = \left(\delta \operatorname{arcosh}\left(\mathrm{e}^{\tau/\delta}\right) - \delta \mathrm{e}^{-\tau/\delta}\sqrt{\mathrm{e}^{2\tau/\delta} - 1}\,, \delta \mathrm{e}^{-\tau/\delta}\right) \quad \text{für } \tau \in [0, \infty[$$

und somit einen differenzierbaren uneigentlichen Weg $\sigma : [0, \infty[\to \mathbb{C}$.

2. Da die erste bzw. zweite Ableitung von σ in $\tau \in]0, \infty[$ die Gestalt

$$D\sigma(\tau) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\tau/\delta}}\left(\sqrt{\mathrm{e}^{2\tau/\delta} - 1}, -1\right) \quad \text{bzw.} \quad D^2\sigma(\tau) = \frac{1}{\delta \mathrm{e}^{\tau/\delta}}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{2\tau/\delta} - 1}}, 1\right)$$

besitzt, erhält man aus der Beziehung $D^2\sigma(\tau) = \kappa(\tau) \cdot \mathrm{i}\, D\sigma(\tau)$ zunächst

$$\frac{1}{\delta \mathrm{e}^{\tau/\delta}}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{2\tau/\delta} - 1}}, 1\right) = \frac{\kappa(\tau)}{\mathrm{e}^{\tau/\delta}}\left(1, \sqrt{\mathrm{e}^{2\tau/\delta} - 1}\right) \quad \text{und somit} \quad \kappa(\tau) = \frac{1}{\delta\sqrt{\mathrm{e}^{2\tau/\delta} - 1}}$$

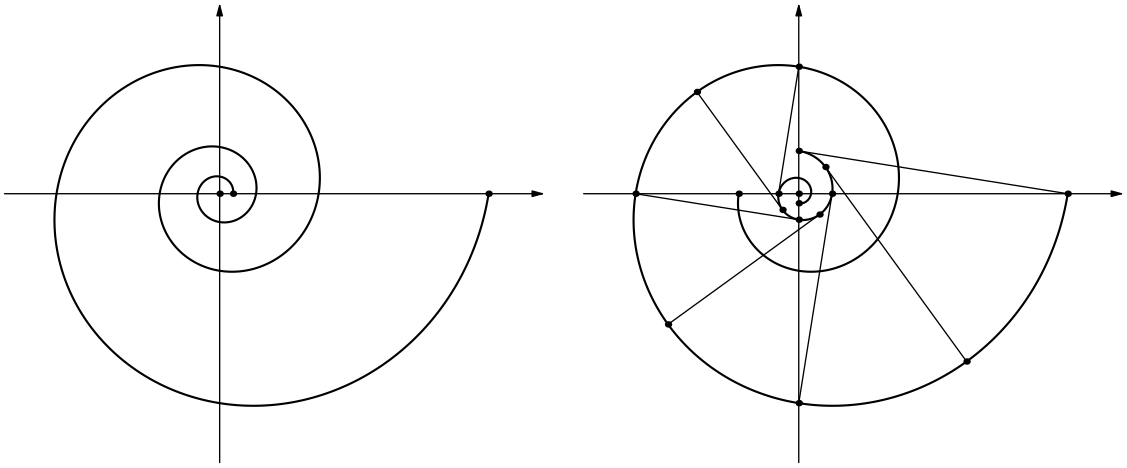
als Krümmung des uneigentlichen Weges σ in $\tau \in]0, \infty[$, woraus sich

$$\zeta(\tau) = \sigma(\tau) + \frac{\mathrm{i}\, D\sigma(\tau)}{\kappa(\tau)} = \left(\delta \operatorname{arcosh}\left(\mathrm{e}^{\tau/\delta}\right), \delta \mathrm{e}^{\tau/\delta}\right) \in \mathbb{C}$$

als Mittelpunkt des Krümmungskreises an σ in $\tau \in]0, \infty[$ ergibt. Kehrt man zum ursprünglichen Parameter $t \in]0, \infty[$ mittels $\tau = \varphi(t) = \delta \ln\left(\cosh\frac{t}{\delta}\right)$ zurück, so folgt

$$\kappa(\varphi(t)) = \frac{1}{\delta \sinh\frac{t}{\delta}} \in \mathbb{R} \quad \text{sowie} \quad \zeta(\varphi(t)) = \left(t, \delta \cosh\tfrac{t}{\delta}\right) \in \mathbb{C}.$$

Somit läuft der uneigentliche Weg $\zeta \circ \varphi :]0, \infty[\to \mathbb{C}$ der Krümmungsmittelpunkte der Schleppkurve längs einer Kettenlinie. $\square$



Aufgabe 5. Seien $z = (\delta, \beta) \in \mathbb{C}$ mit $\delta > 0$ und $\beta > 0$ vorgegeben sowie durch

$$\gamma(t) = \operatorname{Exp}(zt) = \mathrm{e}^{\delta t}(\cos \beta t, \sin \beta t) \in \mathbb{C} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

ein uneigentlicher Weg $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ entlang einer *Logarithmischen Spirale* definiert.

1. Wird die Längenfunktion $\varphi : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ des uneigentlichen Weges γ durch

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t} |D\gamma(s)|\, ds \in \mathbb{R} \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \text{ eingeführt,}$$

so bilde man den durch Verkettung $\gamma = \sigma \circ \varphi$ gegebenen und nach seiner Länge parametrisierten uneigentlichen Weg $\sigma :]0, \infty[\to \mathbb{C}$ längs der Spirale!

2. Man berechne die Krümmung $\kappa(\tau) \in \mathbb{R}$ des uneigentlichen Weges σ sowie den Mittelpunkt $\zeta(\tau) \in \mathbb{C}$ des Krümmungskreises an σ in $\tau \in]0, \infty[$ und zeige, daß der uneigentliche Weg $\zeta \circ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der Krümmungsmittelpunkte ebenfalls entlang einer *Logarithmischen Spirale* verläuft!

Lösung. 1. Aus der Gestalt der Ableitung $D\gamma(s) = z \operatorname{Exp}(zs)$ von γ in $s \in \mathbb{R}$ ergibt sich für die Längenfunktion des uneigentlichen Weges γ in $t \in \mathbb{R}$ der Wert

$$\tau = \varphi(t) = \int_{-\infty}^{t} |D\gamma(s)|\, ds = \int_{-\infty}^{t} \left| z\mathrm{e}^{\delta s} \operatorname{Exp}(\mathrm{i}\beta s) \right| ds = \int_{-\infty}^{t} |z|\, \mathrm{e}^{\delta s} ds = \frac{|z|\, \mathrm{e}^{\delta t}}{\delta}.$$

Mit der bijektiven, streng monoton wachsenden Transformation $\varphi : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ wird durch die Verkettung $\gamma = \sigma \circ \varphi$ ein nach seiner Länge parametrisierter uneigentlicher Weg $\sigma :]0, \infty[\to \mathbb{C}$ entlang der Spirale definiert: Der Wert

$$t = \varphi^{-1}(\tau) = \tfrac{1}{\delta} \ln \tfrac{\delta\tau}{|z|} \quad \text{für } \tau \in]0, \infty[$$

der inversen Funktion liefert demzufolge die Darstellung

$$\sigma(\tau) = \gamma(t) = \operatorname{Exp}\left(\tfrac{z}{\delta} \ln \tfrac{\delta\tau}{|z|}\right) \quad \text{für } \tau \in]0, \infty[$$

und somit einen differenzierbaren uneigentlichen Weg $\sigma :]0, \infty[\to \mathbb{C}$.

2. Da die erste Ableitung von σ in $\tau \in]0,\infty[$ die Gestalt $D\sigma(\tau) = \frac{z}{\delta\tau}\,\sigma(\tau)$ besitzt, erhält man wegen $z = (\delta, \beta)$ die zweite Ableitung

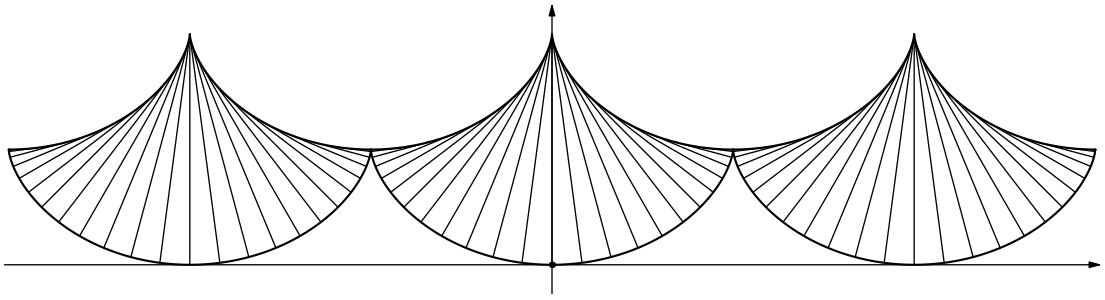
$$D^2\sigma(\tau) = \frac{z^2}{(\delta\tau)^2}\,\sigma(\tau) - \frac{z}{\delta\tau^2}\,\sigma(\tau) = \frac{\beta z\,\mathrm{i}}{(\delta\tau)^2}\,\sigma(\tau).$$

Die Beziehung $D^2\sigma(\tau) = \kappa(\tau)\cdot\mathrm{i}\,D\sigma(\tau)$ liefert somit die Krümmung $\kappa(\tau) = \frac{\beta}{\delta\tau} > 0$ des uneigentlichen Weges σ in $\tau \in]0,\infty[$.

3. Für den Mittelpunkt des Krümmungskreises an σ in $\tau \in]0,\infty[$ folgt wegen $z = (\delta, \beta)$ die Darstellung

$$\zeta(\tau) = \sigma(\tau) + \frac{\mathrm{i}\,D\sigma(\tau)}{\kappa(\tau)} = \sigma(\tau) + \frac{z\,\mathrm{i}}{\beta}\,\sigma(\tau) = \frac{\delta}{\beta}\,\mathrm{i}\sigma(\tau).$$

Kehrt man zum ursprünglichen Parameter $t \in \mathbb{R}$ mittels $\tau = \varphi(t)$ zurück, so erhält man $\zeta(\varphi(t)) = \frac{\delta}{\beta}\mathrm{i}\,\gamma(t)$. Demzufolge verläuft der uneigentliche Weg $\zeta\circ\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der Krümmungsmittelpunkte des Weges σ längs einer mit dem Faktor $\frac{\delta}{\beta} > 0$ skalierten und um einen rechten Winkel gedrehten Logarithmischen Spirale. $\square$



Aufgabe 6. Sei eine Längeneinheit $\delta > 0$ und die Funktion $\kappa :]-4\delta, 4\delta[\to \mathbb{R}$ durch

$$\kappa(\tau) = \frac{1}{\sqrt{16\delta^2 - \tau^2}} \quad \text{für } \tau \in]-4\delta, 4\delta[\text{ gegeben.}$$

1. Man bestimme den durch

$$\theta(\tau) = \int_0^\tau \kappa(t)\,dt, \quad v(\tau) = (\cos\theta(\tau), \sin\theta(\tau)) \quad \text{und} \quad \sigma(\tau) = \int_0^\tau v(t)\,dt$$

für $\tau \in]-4\delta, 4\delta[$ definierten *uneigentlichen* Weg $\sigma :]-4\delta, 4\delta[\to \mathbb{C}$ längs einer *Rollkurve*, der durch den Punkt $\sigma(0) = \mathbb{0}$ in Richtung $v(0) = \mathbb{1}$ läuft, nach seiner Länge parametrisiert ist und in jedem Punkt $\tau \in]-4\delta, 4\delta[$ die Krümmung $\kappa(\tau)$ besitzt!

2. Man berechne in jedem Punkt $\tau \in]-4\delta, 4\delta[$ jeweils den Mittelpunkt $\zeta(\tau) \in \mathbb{C}$ des Krümmungskreises an σ!

Lösung. 1.1. Die durch $\varphi(s) = 4\delta s$ für $s \in \mathbb{R}$ definierte Transformation $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der neuen Variablen s in die alte Variable $t = \varphi(s)$ führt auf das Grundintegral

$$\theta(\tau) = \int_0^\tau \frac{dt}{\sqrt{16\delta^2 - t^2}} = \int_0^{\tau/4\delta} \frac{4\delta\,ds}{4\delta\sqrt{1-s^2}} = \arcsin\frac{\tau}{4\delta} \quad \text{für } \tau \in]-4\delta, 4\delta[.$$

1.2. Die Gestalt der Ableitung $D\theta = \kappa$ der Transformation $\theta :]-4\delta, 4\delta[\to \mathbb{R}$ und die Beziehung $t = 4\delta \sin\theta(t)$ liefern für jedes $\tau \in]-4\delta, 4\delta[$ einerseits

$$\begin{aligned}\int_0^\tau \cos\theta(t)\,dt &= \int_0^\tau \sqrt{1-\sin^2\theta(t)}\,dt = \int_0^\tau \sqrt{1-\sin^2\theta(t)} \cdot \sqrt{16\delta^2 - t^2} \cdot \kappa(t)\,dt \\ &= \int_0^\tau 4\delta\big(1-\sin^2\theta(t)\big) \cdot D\theta(t)\,dt = \int_0^{\theta(\tau)} 4\delta\big(1-\sin^2\vartheta\big)\,d\vartheta \\ &= \int_0^{\theta(\tau)} 2\delta\big(1+\cos 2\vartheta\big)\,d\vartheta = \delta\big(2\theta(\tau) + \sin 2\theta(\tau)\big)\end{aligned}$$

und andererseits

$$\int_0^\tau \sin\theta(t)\,dt = \frac{1}{4\delta}\int_0^\tau t\,dt = \frac{\tau^2}{8\delta} = 2\delta\sin^2\theta(\tau) = \delta\big(1-\cos 2\theta(\tau)\big),$$

also insgesamt die Darstellung

$$\sigma(\tau) = \int_0^\tau (\cos\theta(t), \sin\theta(t))\,dt = \delta\big(2\theta(\tau) + \sin 2\theta(\tau), 1 - \cos 2\theta(\tau)\big)$$

des uneigentlichen Weges $\sigma :]-4\delta, 4\delta[\to \mathbb{C}$.

2. Wegen $D\sigma = v$ ergibt sich für den Mittelpunkt des Krümmungskreises an σ in einem beliebigen Punkt $\tau \in \,]{-}4\delta, 4\delta[$ zunächst

$$\zeta(\tau) = \sigma(\tau) + \frac{\mathbb{i}\, D\sigma(\tau)}{\kappa(\tau)} = \sigma(\tau) + \frac{\mathbb{i}\, v(\tau)}{\kappa(\tau)} = \sigma(\tau) + \frac{\big(-\sin\theta(\tau), \cos\theta(\tau)\big)}{\kappa(\tau)}$$

und somit aufgrund der Ergebnisse von Schritt 1 schließlich die Darstellung

$$\begin{aligned}\zeta(\tau) &= \delta\big(2\theta(\tau) + \sin 2\theta(\tau), 1 - \cos 2\theta(\tau)\big) + 4\delta\cos\theta(\tau)\cdot\big(-\sin\theta(\tau), \cos\theta(\tau)\big)\\ &= \delta\big(2\theta(\tau) - \sin 2\theta(\tau), 3 + \cos 2\theta(\tau)\big).\end{aligned}$$

Demnach verläuft der uneigentliche Weg $\zeta : \,]{-}4\delta, 4\delta[\, \to \mathbb{C}$ der Krümmungsmittelpunkte an σ entlang einer verschobenen Rollkurve. $\square$