Übungsaufgaben 14

Integration längs eines Weges

Aufgabe 1. Seien Intervallgrenzen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ des abgeschlossenen beschränkten Intervalls $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ sowie zwei Stammfunktionen $\rho : X \to \mathbb{R}$ und $\alpha : X \to \mathbb{R}$ regulierter Funktionen gegeben, so daß $\rho(t) \geq \rho_0$ für jedes $t \in X$ und eine untere Schranke $\rho_0 > 0$ gilt. Sei desweiteren der Weg $\gamma : X \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\gamma(t) = \rho(t)\operatorname{Exp}(2\pi\mathbb{i}\alpha(t)) = \rho(t)(\cos 2\pi\alpha(t), \sin 2\pi\alpha(t)) \quad \text{für } t \in X.$$

1. Man zeige, daß unter diesen Voraussetzungen stets folgende Beziehung gilt:

$$\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln(\rho(b)) - \ln(\rho(a)) + 2\pi\mathbb{i}(\alpha(b) - \alpha(a)).$$

2. Man gebe zugleich *notwendige* und *hinreichende* Bedingungen an ρ und α an, unter denen γ ein *geschlossener* Weg ist und berechne für diesen Fall die Windungszahl $\operatorname{ind}(\gamma, \mathbb{0}) \in \mathbb{Z}$ von γ in bezug auf den Nullpunkt! ⑥

Lösung. 1. Für den oben definierten Weg γ gilt nach Produkt- und Kettenregel

$$D\gamma(t) = D\rho(t) \cdot \operatorname{Exp}(2\pi\mathbb{i}\alpha(t)) + 2\pi\mathbb{i}\, D\alpha(t) \cdot \rho(t)\operatorname{Exp}(2\pi\mathbb{i}\alpha(t))$$

für alle $t \in X$ und somit in der Tat

$$\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_a^b \frac{D\rho(t)\,dt}{\rho(t)} + \int_a^b 2\pi\mathbb{i}\, D\alpha(t)\,dt = \ln\frac{\rho(b)}{\rho(a)} + 2\pi\mathbb{i}(\alpha(b) - \alpha(a)).$$

2. Der Weg $\gamma : X \to \mathbb{C}$ ist genau dann *geschlossen,* wenn folgende Bedingung gilt:

$$\rho(a)\operatorname{Exp}(2\pi\mathbb{i}\alpha(a)) = \gamma(a) = \gamma(b) = \rho(b)\operatorname{Exp}(2\pi\mathbb{i}\alpha(b)).$$

Wegen $\rho(a) > 0$ und $\rho(b) > 0$ sowie $|\operatorname{Exp}(2\pi\mathbb{i}\alpha(a))| = |\operatorname{Exp}(2\pi\mathbb{i}\alpha(a))| = 1$ ist diese Beziehung äquivalent zu den beiden Bedingungen

$$\rho(a) = \rho(b) \quad \textit{und} \quad \operatorname{Exp}(2\pi\mathbb{i}\alpha(a)) = \operatorname{Exp}(2\pi\mathbb{i}\alpha(b)).$$

Da die Exponentialfunktion die Periode $2\pi\mathbb{i} \in \mathbb{C}$ hat, ergeben sich daraus schließlich die zugleich *notwendigen* und *hinreichenden* Bedingungen

$$\rho(a) = \rho(b) \quad \textit{und} \quad \alpha(b) - \alpha(a) \in \mathbb{Z}.$$

3. Nach Schritt 1 gilt in diesem Falle

$$\operatorname{ind}(\gamma, \mathbb{0}) = \frac{\mathbb{1}}{2\pi\mathbb{i}} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = \alpha(b) - \alpha(a) \in \mathbb{Z}$$

für die Windungszahl $\operatorname{ind}(\gamma, \mathbb{0}) \in \mathbb{Z}$ von γ in bezug auf den Nullpunkt. □

Aufgabe 2. Seien der *geschlossene* Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ entlang der Einheitskreislinie $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ und die stetige Funktion $g : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ durch

$$\gamma(t) = \operatorname{Exp}(\mathbb{i}t) = (\cos t, \sin t) \quad \text{für } t \in [0, 2\pi] \quad \text{und} \quad g(\zeta) = \frac{\mathbb{1}}{\zeta(\zeta - \mathbb{2})} \quad \text{für } \zeta \in \mathbb{S}$$

vorgegeben. Man berechne die Werte

$$f(z) = \frac{\mathbb{1}}{2\pi\mathbb{i}} \int_\gamma \frac{g(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{S}$$

der Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ durch Teilbruchzerlegungen! ⑥

Lösung. 1.1. Im Falle $z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{S} \cup \{\mathbb{0}, \mathbb{2}\})$ genügen die Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{C}$ im Teilbruchansatz

$$\frac{g(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{\mathbb{1}}{\zeta(\zeta - \mathbb{2})(\zeta - z)} = \frac{a}{\zeta} + \frac{b}{\zeta - \mathbb{2}} + \frac{c}{\zeta - z} \quad \text{für } \zeta \in \mathbb{S}$$

der Gleichung

$$a(\zeta - \mathbb{2})(\zeta - z) + b\zeta(\zeta - z) + c\zeta(\zeta - \mathbb{2}) = \mathbb{1} \quad \text{für } \zeta \in \mathbb{S}.$$

Durch Koeffizientenvergleich vor Termen gleicher Ordnung in ζ ergibt sich

$$a + b + c = \mathbb{0}, \quad (z + \mathbb{2})a + zb + \mathbb{2}c = \mathbb{0}, \quad \mathbb{2}za = \mathbb{1}.$$

Subtrahiert man das Doppelte der ersten von der zweiten Gleichung, so erhält man $za + (z - \mathbb{2})b = \mathbb{0}$, woraus wegen der dritten Gleichung

$$a = \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{2}z} \quad \text{zunächst} \quad b = \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{2}(\mathbb{2} - z)} \quad \text{sowie} \quad c = \frac{\mathbb{1}}{z(z - \mathbb{2})}$$

und damit für $\zeta \in \mathbb{S}$ und $z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{S} \cup \{\mathbb{0}, \mathbb{2}\})$ die Teilbruchzerlegung

$$\frac{g(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{\mathbb{1}}{\zeta(\zeta - \mathbb{2})(\zeta - z)} = \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{2}z\zeta} + \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{2}(\mathbb{2} - z)(\zeta - \mathbb{2})} + \frac{\mathbb{1}}{z(z - \mathbb{2})(\zeta - z)} \quad \text{folgt.}$$

1.2. Im Falle $z = \mathbb{0}$ werden im entsprechenden Teilbruchansatz

$$\frac{g(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{\mathbb{1}}{\zeta^2(\zeta - \mathbb{2})} = \frac{a}{\zeta} + \frac{b}{\zeta^2} + \frac{c}{\zeta - \mathbb{2}} \quad \text{für } \zeta \in \mathbb{S}$$

die unbekannten Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{C}$ durch die Gleichung

$$a\zeta(\zeta - \mathbb{2}) + b(\zeta - \mathbb{2}) + c\zeta^2 = \mathbb{1} \quad \text{für } \zeta \in \mathbb{S}$$

bestimmt. Durch Koeffizientenvergleich vor Termen gleicher Ordnung in ζ ergibt sich

$$a + c = \mathbb{0}, \quad b - \mathbb{2}a = \mathbb{0}, \quad -\mathbb{2}b = \mathbb{1},$$

also $b = -\frac{\mathbb{1}}{\mathbb{2}}$, $a = -\frac{\mathbb{1}}{\mathbb{4}}$ und $c = \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{4}}$, das heißt, man erhält für $z = \mathbb{0}$ die Zerlegung

$$\frac{g(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{\mathbb{1}}{\zeta^2(\zeta - \mathbb{2})} = -\frac{\mathbb{1}}{\mathbb{4}\zeta} - \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{2}\zeta^2} + \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{4}(\zeta - \mathbb{2})} \quad \text{für alle } \zeta \in \mathbb{S}.$$

1.3. Im Falle $z = \mathbb{2}$ ermittelt man im entsprechenden Teilbruchansatz

$$\frac{g(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{\mathbb{1}}{\zeta(\zeta - \mathbb{2})^2} = \frac{a}{\zeta} + \frac{b}{\zeta - \mathbb{2}} + \frac{c}{(\zeta - \mathbb{2})^2} \quad \text{für } \zeta \in \mathbb{S}$$

die unbekannten Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{C}$ durch die Gleichung

$$a(\zeta - \mathbb{2})^2 + b\zeta(\zeta - \mathbb{2}) + c\zeta = \mathbb{1} \quad \text{für } \zeta \in \mathbb{S}.$$

Der Koeffizientenvergleich vor Termen gleicher Ordnung in ζ liefert

$$a + b = \mathbb{0}, \quad c - \mathbb{4}a - \mathbb{2}b = \mathbb{0}, \quad \mathbb{4}a = \mathbb{1},$$

also $a = \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{4}}$, $b = -\frac{\mathbb{1}}{\mathbb{4}}$ und $c = \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{2}}$, das heißt, es ergibt sich für $z = \mathbb{2}$ die Zerlegung

$$\frac{g(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{\mathbb{1}}{\zeta(\zeta - \mathbb{2})^2} = \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{4}\zeta} - \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{4}(\zeta - \mathbb{2})} + \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{2}(\zeta - \mathbb{2})^2} \quad \text{für alle } \zeta \in \mathbb{S}.$$

2.1. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $0 < |z| < 1$ liefern die Windungszahlen $\operatorname{ind}(\gamma, \mathbb{0}) = 1$, $\operatorname{ind}(\gamma, \mathbb{2}) = 0$ sowie $\operatorname{ind}(\gamma, z) = 1$ aufgrund von Schritt 1.1 den Wert

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\mathbb{1}}{2\pi \mathbb{i}} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\mathbb{2}z\zeta} + \frac{\mathbb{1}}{2\pi \mathbb{i}} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\mathbb{2}(\mathbb{2} - z)(\zeta - \mathbb{2})} + \frac{\mathbb{1}}{2\pi \mathbb{i}} \int_\gamma \frac{d\zeta}{z(z - \mathbb{2})(\zeta - z)} \\ &= \frac{\operatorname{ind}(\gamma, \mathbb{0})}{\mathbb{2}z} + \frac{\operatorname{ind}(\gamma, \mathbb{2})}{\mathbb{2}(\mathbb{2} - z)} + \frac{\operatorname{ind}(\gamma, z)}{z(z - \mathbb{2})} = \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{2}z} + \frac{\mathbb{1}}{z(z - \mathbb{2})} = \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{2}(z - \mathbb{2})} \end{aligned}$$

der Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{S} \to \mathbb{C}$. Da wegen Schritt 1.2 für $z = \mathbb{0}$ auch

$$f(\mathbb{0}) = \frac{\mathbb{1}}{2\pi \mathbb{i}} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\mathbb{4}(\zeta - \mathbb{2})} - \frac{\mathbb{1}}{2\pi \mathbb{i}} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\mathbb{4}\zeta} - \frac{\mathbb{1}}{2\pi \mathbb{i}} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\mathbb{2}\zeta^2} = \frac{\operatorname{ind}(\gamma, \mathbb{2})}{\mathbb{4}} - \frac{\operatorname{ind}(\gamma, \mathbb{0})}{\mathbb{4}} = -\frac{\mathbb{1}}{\mathbb{4}}$$

gilt, erhält man die obige Darstellung von f für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$.

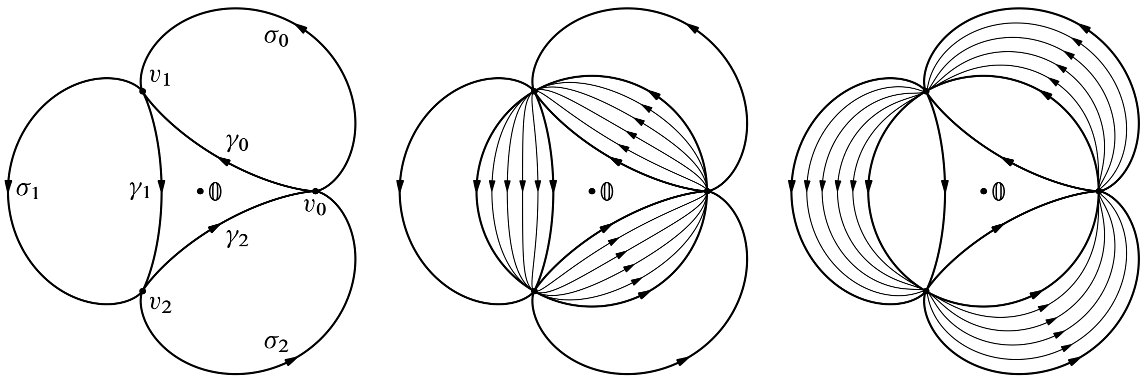
2.2. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$, $z \neq \mathbb{2}$ ergibt sich mit Hilfe der Windungszahlen $\operatorname{ind}(\gamma, \mathbb{0}) = 1$, $\operatorname{ind}(\gamma, \mathbb{2}) = 0$ und $\operatorname{ind}(\gamma, z) = 0$ sowie Schritt 1.1 der Wert

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\mathbb{1}}{2\pi \mathbb{i}} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\mathbb{2}z\zeta} + \frac{\mathbb{1}}{2\pi \mathbb{i}} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\mathbb{2}(\mathbb{2} - z)(\zeta - \mathbb{2})} + \frac{\mathbb{1}}{2\pi \mathbb{i}} \int_\gamma \frac{d\zeta}{z(z - \mathbb{2})(\zeta - z)} \\ &= \frac{\operatorname{ind}(\gamma, \mathbb{0})}{\mathbb{2}z} + \frac{\operatorname{ind}(\gamma, \mathbb{2})}{\mathbb{2}(\mathbb{2} - z)} + \frac{\operatorname{ind}(\gamma, z)}{z(z - \mathbb{2})} = \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{2}z} \end{aligned}$$

der Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{S} \to \mathbb{C}$. Da aufgrund von Schritt 1.3 für $z = \mathbb{2}$ auch

$$f(\mathbb{2}) = \frac{\mathbb{1}}{2\pi \mathbb{i}} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\mathbb{4}\zeta} - \frac{\mathbb{1}}{2\pi \mathbb{i}} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\mathbb{4}(\zeta - \mathbb{2})} + \frac{\mathbb{1}}{2\pi \mathbb{i}} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\mathbb{2}(\zeta - \mathbb{2})^2} = \frac{\operatorname{ind}(\gamma, \mathbb{0})}{\mathbb{4}} - \frac{\operatorname{ind}(\gamma, \mathbb{2})}{\mathbb{4}} = \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{4}}$$

gilt, ist die obige Darstellung von f für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$ gültig. □



Aufgabe 3. Seien die Wege $\gamma_k, \sigma_k : \left[\frac{2\pi k}{3}, \frac{2\pi(k+1)}{3}\right] \to \mathbb{C}$ für $k \in \{0, 1, 2\}$ durch

$$\gamma_k(t) = \left(\tfrac{2}{3}\cos t + \tfrac{1}{3}\cos 2t, \tfrac{2}{3}\sin t - \tfrac{1}{3}\sin 2t\right) \quad \text{für } t \in \left[\tfrac{2\pi k}{3}, \tfrac{2\pi(k+1)}{3}\right],$$
$$\sigma_k(t) = \left(\tfrac{4}{3}\cos t - \tfrac{1}{3}\cos 4t, \tfrac{4}{3}\sin t - \tfrac{1}{3}\sin 4t\right) \quad \text{für } t \in \left[\tfrac{2\pi k}{3}, \tfrac{2\pi(k+1)}{3}\right]$$

definiert sowie die drei *geschlossenen* Wege $\gamma = \gamma_0 \oplus \gamma_1 \oplus \gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ und $\sigma = \sigma_0 \oplus \sigma_1 \oplus \sigma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ sowie $\omega = \gamma_0 \oplus \sigma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \sigma_0 \oplus \gamma_1 \oplus \sigma_2 : [0, 4\pi] \to \mathbb{C}$ durch entsprechende Zusammensetzungen gegeben.

1. Man bestimme die Länge des geschlossenen Weges ω!
2. Man berechne die Windungszahl

$$\operatorname{ind}(\omega, \mathbb{0}) = \frac{\mathbb{1}}{2\pi \mathbb{i}} \int_\omega \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{\mathbb{1}}{2\pi \mathbb{i}} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{\mathbb{1}}{2\pi \mathbb{i}} \int_\sigma \frac{d\zeta}{\zeta} \in \mathbb{Z}$$

des Weges ω in bezug auf $\mathbb{0}$, indem man *einen* der folgenden Lösungswege wählt:

2.1. Man berechne die beiden Integrale längs γ und σ direkt (und mühsam) mittels elementarer Variablentransformationen zur Integration der Verkettung rationaler und trigonometrischer Funktionen!

2.2. Sei der *geschlossene* Weg $\varkappa : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ entlang einer Kreislinie durch

$$\varkappa(t) = \operatorname{Exp}(\mathbb{i}t) = (\cos t, \sin t) \quad \text{für } t \in [0, 2\pi] \text{ gegeben.}$$

Man finde eine *geschlossene* Deformation $\varphi : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{C}$ von γ in $\varkappa$ innerhalb von $\mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}\}$ sowie eine *geschlossene* Deformation $\psi : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{C}$ von σ in $\varkappa$ innerhalb von $\mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}\}$, die eine (elegante) Zurückführung beider Integrale längs γ und σ auf Integrale längs $\varkappa$ mit Hilfe des Integralsatzes von Cauchy gestattet! ⑧

Lösung. 1. Da der Weg ω aus denselben Teilen zusammengesetzt ist wie die Wege γ und σ, kann man sich auf die Berechnung der Längen von γ und σ konzentrieren: Für alle $t \in [0, 2\pi]$ gilt

$$\begin{aligned} D\gamma(t) &= \left(-\tfrac{2}{3}\sin t - \tfrac{2}{3}\sin 2t, \tfrac{2}{3}\cos t - \tfrac{2}{3}\cos 2t\right), \\ D\sigma(t) &= \left(-\tfrac{4}{3}\sin t + \tfrac{4}{3}\sin 4t, \tfrac{4}{3}\cos t - \tfrac{4}{3}\cos 4t\right) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} |D\gamma(t)|^2 &= \tfrac{4}{9}\left(\sin^2 t + 2\sin t\sin 2t + \sin^2 2t + \cos^2 t - 2\cos t\cos 2t + \cos^2 2t\right), \\ |D\sigma(t)|^2 &= \tfrac{16}{9}\left(\sin^2 t - 2\sin t\sin 4t + \sin^2 4t + \cos^2 t - 2\cos t\cos 4t + \cos^2 4t\right). \end{aligned}$$

Das Additionstheorem $1 - \cos 3t = 2\sin^2\left(\frac{3}{2}t\right)$ liefert für alle $t \in [0, 2\pi]$ demnach

$$\begin{aligned} |D\gamma(t)| &= \tfrac{2}{3}\sqrt{2 - 2\cos 3t} = \tfrac{4}{3}\left|\sin \tfrac{3}{2}t\right|, \\ |D\sigma(t)| &= \tfrac{4}{3}\sqrt{2 - 2\cos 3t} = \tfrac{8}{3}\left|\sin \tfrac{3}{2}t\right|. \end{aligned}$$

Für die Länge des Weges ω ergibt sich somit schließlich

$$\int_0^{2\pi} |D\gamma(t)|\,dt + \int_0^{2\pi} |D\sigma(t)|\,dt = 4\int_0^{2\pi} \left|\sin \tfrac{3}{2}t\right| dt = 12\int_0^{2\pi/3} \sin \tfrac{3}{2}t\,dt = 16.$$

2.2. Definiert man die stetigen Funktionen $\varphi, \psi : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{C}$ durch

$$\begin{aligned} \varphi(t, \xi) &= \left(\tfrac{2+\xi}{3}\cos t + \tfrac{1-\xi}{3}\cos 2t, \tfrac{2+\xi}{3}\sin t - \tfrac{1-\xi}{3}\sin 2t\right) \quad \text{für } t \in [0, 2\pi], \xi \in [0, 1], \\ \psi(t, \xi) &= \left(\tfrac{4-\xi}{3}\cos t - \tfrac{1-\xi}{3}\cos 4t, \tfrac{4-\xi}{3}\sin t - \tfrac{1-\xi}{3}\sin 4t\right) \quad \text{für } t \in [0, 2\pi], \xi \in [0, 1], \end{aligned}$$

so sind die Bedingungen $\varphi(0, \xi) = \varphi(2\pi, \xi)$ und $\psi(0, \xi) = \psi(2\pi, \xi)$ für alle $\xi \in [0, 1]$ sowie $\varphi(t, 0) = \gamma(t)$ und $\varphi(t, 1) = \varkappa(t)$ bzw. $\psi(t, 0) = \sigma(t)$ und $\psi(t, 1) = \varkappa(t)$ für jedes $t \in [0, 2\pi]$ erfüllt.

Somit ist $\varphi : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{C}$ eine *geschlossene* Deformation von γ in $\varkappa$ innerhalb von $\mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}\}$ bzw. $\psi : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{C}$ eine *geschlossene* Deformation von σ in $\varkappa$ innerhalb von $\mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}\}$. Der Integralsatz von Cauchy liefert schließlich den Wert

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}(\omega, \mathbb{0}) &= \frac{\mathbb{1}}{2\pi\mathbb{i}}\int_\omega \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{\mathbb{1}}{2\pi\mathbb{i}}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{\mathbb{1}}{2\pi\mathbb{i}}\int_\sigma \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{\mathbb{2}}{2\pi\mathbb{i}}\int_\varkappa \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= \frac{\mathbb{2}}{2\pi\mathbb{i}}\int_0^{2\pi} \frac{D\varkappa(t)\,dt}{\varkappa(t)} = \frac{\mathbb{2}}{2\pi\mathbb{i}}\int_0^{2\pi} \frac{\mathbb{i}\operatorname{Exp}(\mathbb{i}t)\,dt}{\operatorname{Exp}(\mathbb{i}t)} = \frac{\mathbb{2}}{2\pi\mathbb{i}} \cdot 2\pi\mathbb{i} = 2 \end{aligned}$$

für die Windungszahl des Weges ω in bezug auf den Nullpunkt $\mathbb{0}$. □

Aufgabe 4. Man berechne das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2)\cos 2bt\, dt \quad \text{für jeden Parameter } b \in \mathbb{R},$$

indem man für beliebiges $r > 0$ das Integral $\int_\gamma \operatorname{Exp}(-z^2)\, dz$ längs des aus den Teilen

$$\begin{aligned} &\gamma_1(\tau) = (r, \tau), && \gamma_3(\tau) = (-r, b-\tau) && \text{für } \tau \in [0, b], \\ &\gamma_2(t) = (-t, b), && \gamma_4(t) = (t, 0) && \text{für } t \in [-r, r], \end{aligned}$$

zusammengesetzten Streckenzuges $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_4 : [0, 4r + 2b] \to \mathbb{C}$ entlang eines Rechtecks sowohl direkt als auch mit Hilfe des Integralsatzes von Cauchy bestimmt und beim Grenzübergang $r \to \infty$ die Kenntnis des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2)\, dt = \sqrt{\pi}$$

ausnutzt!

Lösung. Seien die reellen Zahlen $b \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ beliebig vorgegeben und durch $g(z) = \operatorname{Exp}(-z^2)$ für $z \in \mathbb{C}$ die analytische Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert.

1. Für das Integral $\int_\gamma g(z)\, dz$ längs des *geschlossenen* Streckenzuges γ ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{4} \int_{\gamma_k} g(z)\, dz = &\int_0^b \exp(-(r^2 - \tau^2))\, \mathbb{i}\, \operatorname{Exp}(-2\mathbb{i} r\tau)\, d\tau \\ &- \int_{-r}^{r} \exp(-(t^2 - b^2))\, \operatorname{Exp}(2\mathbb{i} bt)\, dt \\ &- \int_0^b \exp(-(r^2 - (b-\tau)^2))\, \mathbb{i}\, \operatorname{Exp}(2\mathbb{i} r(b-\tau))\, d\tau \\ &+ \int_{-r}^{r} (\exp(-t^2), 0)\, dt. \end{aligned}$$

2. Da durch $\varphi(s, \xi) = (1-\xi)\gamma(s)$ für $s \in [0, 4r+2b]$ und $\xi \in [0, 1]$ eine *geschlossene* Deformation $\varphi : [0, 4r + 2b] \times [0, 1] \to \mathbb{C}$ des Weges $\gamma : [0, 4r + 2b] \to \mathbb{C}$ in den Weg $\sigma : [0, 4r + 2b] \to \mathbb{C}$ innerhalb von $\mathbb{C}$ definiert wird, der sich auf einen Punkt $\sigma(s) = \mathbb{0}$ für $s \in [0, 4r + 2b]$ reduziert, liefert der Integralsatz von Cauchy somit $\int_\gamma g(z)\, dz = \int_\sigma g(z)\, dz = \mathbb{0}$. Mit Schritt 1 folgt daraus für das gesuchte Integral

$$\begin{aligned} \int_{-r}^{r} \exp(b^2 - t^2)\, \operatorname{Exp}(2\mathbb{i} bt)\, dt = &\int_{-r}^{r} (\exp(-t^2), 0)\, dt \\ &+ \exp(-r^2) \int_0^b \exp(\tau^2)\, \mathbb{i}\, \operatorname{Exp}(-2\mathbb{i} r\tau)\, d\tau \\ &- \exp(-r^2) \int_0^b \exp(s^2)\, \mathbb{i}\, \operatorname{Exp}(2\mathbb{i} rs)\, ds. \end{aligned}$$

3. Für die Realteile beider Seiten ergibt sich wegen der Grenzwertbeziehungen

$$\lim_{r\to\infty} \exp(-r^2) \left| \int_0^b \exp(\tau^2)\, \mathbb{i}\, \mathrm{Exp}(-2\mathbb{i} r\tau)\, d\tau \right| \le \lim_{r\to\infty} \exp(b^2 - r^2) \int_0^b d\tau = 0,$$

$$\lim_{r\to\infty} \exp(-r^2) \left| \int_0^b \exp(s^2)\, \mathbb{i}\, \mathrm{Exp}(2\mathbb{i} rs)\, ds \right| \le \lim_{r\to\infty} \exp(b^2 - r^2) \int_0^b d\tau = 0$$

die Relation

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \exp(b^2 - t^2) \cos 2bt\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2)\, dt = \sqrt{\pi}.$$

Da der Integrand eine *gerade* Funktion ist, folgt daraus schließlich

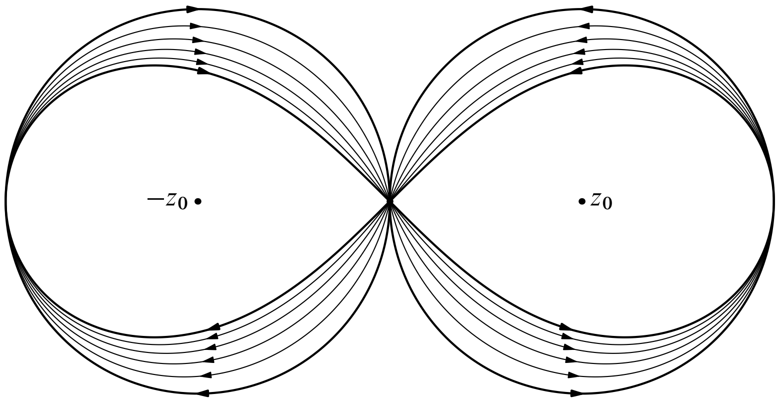
$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2) \cos 2bt\, dt = \sqrt{\pi} \exp(-b^2)$$

für jedes $b \in \mathbb{R}$. $\square$

Aufgabe 5. Sei der *geschlossene* Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ entlang einer *Lemniskate* durch

$$\gamma(t) = \left(\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}, \frac{-\sin t \cos t}{1+\cos^2 t}\right) \quad \text{für } t \in [0, 2\pi] \text{ gegeben.}$$

Man berechne die Windungszahlen $\operatorname{ind}(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z}$ und $\operatorname{ind}(\gamma, -z_0) \in \mathbb{Z}$ des Weges γ in bezug auf die Punkte $z_0 = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \in \mathbb{C}$ und $-z_0 = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \in \mathbb{C}$!



Lösung. 1. Die gesuchten Integrale längs des Weges $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ werden auf Integrale längs eines *geschlossenen* Weges $\varkappa : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ in $\mathbb{C} \setminus \{z_0, -z_0\}$ zurückgeführt, welcher entlang zweier *geschlossener* Kreislinien verläuft: Definiert man

$$\varkappa(t) = (|\sin t| \sin t, -\sin t \cos t) \quad \text{für alle } t \in [0, 2\pi],$$

dann gilt wegen $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$ und $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$ in der Tat die Darstellung $\varkappa = \varkappa_1 \oplus \varkappa_2$, wobei die Wege $\varkappa_1 : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ und $\varkappa_2 : [\pi, 2\pi] \to \mathbb{C}$ durch

$$\begin{aligned}
\varkappa_1(t) &= \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2t, -\tfrac{1}{2}\sin 2t\right) = z_0 - \tfrac{1}{2}\operatorname{Exp}(2\mathbb{i}t) && \text{für } t \in [0, \pi], \\
\varkappa_2(t) &= \left(\tfrac{1}{2}\cos 2t - \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\sin 2t\right) = \tfrac{1}{2}\operatorname{Exp}(-2\mathbb{i}t) - z_0 && \text{für } t \in [\pi, 2\pi],
\end{aligned}$$

gegeben sind. Somit wird die Kreislinie $\varkappa_1$ um $z_0 = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ vom Radius $r = \frac{1}{2}$ *positiv* und die Kreislinie $\varkappa_2$ um $-z_0 = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ vom Radius $r = \frac{1}{2}$ *negativ* durchlaufen.

2. Definiert man die stetige Funktion $\varphi : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{C}$ durch

$$\varphi(t, \xi) = \left(\frac{(1-\xi)\sin t + \xi |\sin t| \sin t}{1 + (1-\xi)\cos^2 t}, \frac{-\sin t \cos t}{1 + (1-\xi)\cos^2 t}\right) \text{ für } t \in [0, 2\pi], \xi \in [0, 1],$$

dann gelten $\varphi(0, \xi) = \varphi(2\pi, \xi)$ für alle $\xi \in [0, 1]$ sowie $\varphi(t, 0) = \gamma(t)$, $\varphi(t, 1) = \varkappa(t)$ für jedes $t \in [0, 2\pi]$. Somit ist $\varphi : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{C}$ eine *geschlossene* Deformation von γ in $\varkappa$ innerhalb von $\mathbb{C} \setminus \{z_0, -z_0\}$. Der Integralsatz von Cauchy liefert

$$\operatorname{ind}(\gamma, z_0) = \frac{\mathbb{1}}{2\pi\mathbb{i}} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{\mathbb{1}}{2\pi\mathbb{i}} \int_{\varkappa_1} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{\mathbb{1}}{\pi} \int_0^\pi \frac{\operatorname{Exp}(2\mathbb{i}t)}{\operatorname{Exp}(2\mathbb{i}t)}\, dt = 1$$

$$\operatorname{ind}(\gamma, -z_0) = \frac{\mathbb{1}}{2\pi\mathbb{i}} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta + z_0} = \frac{\mathbb{1}}{2\pi\mathbb{i}} \int_{\varkappa_2} \frac{d\zeta}{\zeta + z_0} = -\frac{\mathbb{1}}{\pi} \int_\pi^{2\pi} \frac{\operatorname{Exp}(-2\mathbb{i}t)}{\operatorname{Exp}(-2\mathbb{i}t)}\, dt = -1$$

für die Windungszahlen des Weges γ in bezug auf $z_0 \in \mathbb{C}$ und $-z_0 \in \mathbb{C}$. $\square$

Aufgabe 6. Sei die komplexe Zahlenebene $\mathbb{C} = \mathbb{E} \cup \mathbb{S} \cup \mathbb{A}$ als die Vereinigung des Kreisinneren $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, der Kreislinie $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ sowie des Kreisäußeren $\mathbb{A} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ dargestellt. Seien ferner der *geschlossene* Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{S}$ und die stetige Funktion $g : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ durch

$$\gamma(t) = \operatorname{Exp}(\mathbb{i}t) = (\cos t, \sin t) \quad \text{für } t \in [0, 2\pi] \quad \text{und} \quad g(\zeta) = \frac{\mathbb{1}}{\zeta} \quad \text{für } \zeta \in \mathbb{S}$$

vorgegeben. Man berechne die Werte

$$f(z) = \frac{\mathbb{1}}{2\pi\mathbb{i}} \int_\gamma \frac{g(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} \quad \text{für } z \in \mathbb{E} \quad \text{und} \quad h(z) = \frac{\mathbb{1}}{2\pi\mathbb{i}} \int_\gamma \frac{g(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} \quad \text{für } z \in \mathbb{A}$$

der Funktionen $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ und $h : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ durch Teilbruchzerlegungen!

2. Sei ein Punkt $\tau \in [0, 2\pi]$ beliebig fixiert und für jedes $\delta \in\,]0, \pi[$ der *geöffnete* Weg $\gamma_\delta : [\delta, 2\pi - \delta] \to \mathbb{S}$ durch

$$\gamma_\delta(t) = \operatorname{Exp}(\mathbb{i}(t + \tau)) \quad \text{für } t \in [\delta, 2\pi - \delta].$$

gegeben. Man zeige, daß im Punkt $\xi = \operatorname{Exp}(\mathbb{i}\tau) \in \mathbb{S}$ sämtliche Grenzwerte

$$\lim_{z \to \xi} f(z) \in \mathbb{C}, \quad \lim_{z \to \xi} h(z) \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad s(\xi) = \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{\mathbb{1}}{2\pi\mathbb{i}} \int_{\gamma_\delta} \frac{g(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - \xi} \in \mathbb{C}$$

existieren und die Beziehungen

$$g(\xi) = \lim_{z \to \xi} f(z) - \lim_{z \to \xi} h(z) \quad \text{sowie} \quad s(\xi) = \frac{1}{2}\left(\lim_{z \to \xi} f(z) + \lim_{z \to \xi} h(z)\right)$$

erfüllt sind!

Lösung. 1. Im Falle $z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{S} \cup \{\mathbb{0}\})$ berechnet man im Teilbruchansatz

$$\frac{g(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{\mathbb{1}}{\zeta(\zeta - z)} = \frac{a}{\zeta} + \frac{b}{\zeta - z} \quad \text{für } \zeta \in \mathbb{S}$$

die unbekannten Koeffizienten a, b, $c \in \mathbb{C}$ aus der Gleichung $a(\zeta - z) + b\zeta = \mathbb{1}$. Durch Koeffizientenvergleich vor Termen gleicher Ordnung in ζ ergibt sich $a + b = \mathbb{0}$ und $-az = \mathbb{1}$, woraus

$$a = -\frac{\mathbb{1}}{z} \quad \text{sowie} \quad b = \frac{\mathbb{1}}{z}$$

und damit für $\zeta \in \mathbb{S}$ und $z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{S} \cup \{\mathbb{0}\})$ die Teilbruchzerlegung

$$\frac{g(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{\mathbb{1}}{\zeta(\zeta - z)} = \frac{\mathbb{1}}{z(\zeta - z)} - \frac{\mathbb{1}}{z\zeta} \quad \text{folgt.}$$

2.1. Für jedes $z \in \mathbb{A}$ liefern $\operatorname{ind}(\gamma, \mathbb{0}) = 1$ und $\operatorname{ind}(\gamma, z) = 0$ somit den Wert

$$h(z) = \frac{\mathbb{1}}{2\pi\mathbb{i}} \int_\gamma \frac{d\zeta}{z(\zeta - z)} - \frac{\mathbb{1}}{2\pi\mathbb{i}} \int_\gamma \frac{d\zeta}{z\zeta} = \frac{\operatorname{ind}(\gamma, z)}{z} - \frac{\operatorname{ind}(\gamma, \mathbb{0})}{z} = -\frac{\mathbb{1}}{z}$$

der Funktion $h : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$.

2.2. Für jedes $z \in \mathbb{E} \setminus \{\mathbb{0}\}$ liefern $\operatorname{ind}(\gamma, \mathbb{0}) = 1$ und $\operatorname{ind}(\gamma, z) = 1$ ebenso den Wert

$$f(z) = \frac{\mathbb{1}}{2\pi \mathbb{i}} \int_\gamma \frac{d\zeta}{z(\zeta - z)} - \frac{\mathbb{1}}{2\pi \mathbb{i}} \int_\gamma \frac{d\zeta}{z\zeta} = \frac{\operatorname{ind}(\gamma, z)}{z} - \frac{\operatorname{ind}(\gamma, \mathbb{0})}{z} = \mathbb{0}$$

der Funktion $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$. Da für $z = \mathbb{0}$ ebenfalls

$$f(\mathbb{0}) = \frac{\mathbb{1}}{2\pi \mathbb{i}} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta^2} = \mathbb{0}$$

gilt, erhält man die obige Darstellung von f für jedes $z \in \mathbb{E}$.

2.3. Für $\xi = \operatorname{Exp}(\mathbb{i}\tau) \in \mathbb{S}$ folgt aus Schritt 2.1 und 2.2. die Grenzwertbeziehung

$$\lim_{z \to \xi} f(z) - \lim_{z \to \xi} h(z) = \frac{\mathbb{1}}{\xi} = g(\xi)$$

und wegen Schritt 1 außerdem

$$(1) \qquad \frac{\mathbb{1}}{2\pi \mathbb{i}} \int_{\gamma_\delta} \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - \xi)} = \frac{\mathbb{1}}{2\pi \mathbb{i}\xi} \int_{\gamma_\delta} \frac{d\zeta}{\zeta - \xi} - \frac{\mathbb{1}}{2\pi \mathbb{i}\xi} \int_{\gamma_\delta} \frac{d\zeta}{\zeta} \quad \text{für jedes } \delta \in]0, \pi[.$$

Für das erste Integral erhält man wegen $\delta \in]0, \pi[$ nach Definition

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{1}}{2\pi \mathbb{i}\xi} \int_{\gamma_\delta} \frac{d\zeta}{\zeta - \xi} = \frac{\mathbb{1}}{2\pi \mathbb{i}\xi} \int_\delta^{2\pi - \delta} \frac{D\gamma_\delta(t)\, dt}{\gamma_\delta(t) - \xi} &= \frac{\mathbb{1}}{2\pi \mathbb{i}\xi} \int_\delta^{2\pi - \delta} \frac{\mathbb{i} \operatorname{Exp}(\mathbb{i}(t + \tau))\, dt}{\operatorname{Exp}(\mathbb{i}(t + \tau)) - \operatorname{Exp}(\mathbb{i}\tau)} \\ &= \frac{\mathbb{1}}{2\pi \xi} \int_\delta^{2\pi - \delta} \frac{\operatorname{Exp}(\mathbb{i}t)\, dt}{\operatorname{Exp}(\mathbb{i}t) - \mathbb{1}} . \end{aligned}$$

Aufgrund der Beziehung

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{1}}{2\pi \xi} \int_\delta^{2\pi - \delta} \frac{\operatorname{Exp}(\mathbb{i}t)\, dt}{\operatorname{Exp}(\mathbb{i}t) - \mathbb{1}} &= \frac{\mathbb{1}}{2\pi \xi} \int_\delta^{2\pi - \delta} \frac{(\cos t - 1, -\sin t)}{(\cos t - 1, -\sin t)} \cdot \frac{(\cos t, \sin t)\, dt}{(\cos t - 1, \sin t)} \\ &= \frac{\mathbb{1}}{4\pi \xi} \int_\delta^{2\pi - \delta} \frac{(1 - \cos t, -\sin t)\, dt}{1 - \cos t} \\ &= \left(\frac{\pi - \delta}{2\pi \xi}, \frac{\mathbb{1}}{4\pi \xi} \ln \frac{1 - \cos \delta}{1 - \cos(2\pi - \delta)} \right) = \left(\frac{\pi - \delta}{2\pi \xi}, 0 \right) \end{aligned}$$

ergibt sich somit im Grenzprozeß $\delta \downarrow 0$ für das erste Integral

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \frac{\mathbb{1}}{2\pi \mathbb{i}\xi} \int_{\gamma_\delta} \frac{d\zeta}{\zeta - \xi} = \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{\mathbb{1}}{2\pi \xi} \int_\delta^{2\pi - \delta} \frac{\operatorname{Exp}(\mathbb{i}t)\, dt}{\operatorname{Exp}(\mathbb{i}t) - \mathbb{1}} = \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{2}\xi} .$$

Da das zweite Integral wegen $\operatorname{ind}(\gamma, \mathbb{0}) = 1$ gegen den Grenzwert

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \frac{\mathbb{1}}{2\pi \mathbb{i}\xi} \int_{\gamma_\delta} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{\mathbb{1}}{2\pi \mathbb{i}\xi} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{\operatorname{ind}(\gamma, \mathbb{0})}{\xi} = \frac{1}{\xi}$$

konvergiert, folgt daraus die Grenzwertbeziehung

$$s(\xi) = \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{\mathbb{1}}{2\pi \mathbb{i}} \int_{\gamma_\delta} \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - \xi)} = \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{2}\xi} - \frac{\mathbb{1}}{\xi} = -\frac{\mathbb{1}}{\mathbb{2}\xi} = \frac{1}{2} \left(\lim_{z \to \xi} f(z) + \lim_{z \to \xi} h(z) \right)$$

durch den Grenzprozeß $\delta \downarrow 0$ in (1) wegen der Ergebnisse aus Schritt 2. $\square$