Übungsaufgaben 15

Pole und Nullstellen komplexer Funktionen

Aufgabe 1. Sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{i}, -\mathbb{i}\}$ ein Punkt mit $|\mathbb{i} - z_0| < |-\mathbb{i} - z_0|$. Man bestimme jene Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{Z}$, für welche die Laurent-Reihe $\left(\sum_{k=m}^{n} a_k (z - z_0)^k\right)$ um den Mittelpunkt z_0 im Grenzprozeß $n \to \infty$ und $m \to -\infty$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ im

1. Kreisinneren $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < |\mathbb{i} - z_0|\}$,
2. Kreisring $\{z \in \mathbb{C} \mid |\mathbb{i} - z_0| < |z - z_0| < |-\mathbb{i} - z_0|\}$,
3. Kreisäußeren $\{z \in \mathbb{C} \mid |-\mathbb{i} - z_0| < |z - z_0|\}$,

jeweils gegen den Grenzwert

$$s(z) = \frac{2\mathbb{i}}{(z - \mathbb{i})(z + \mathbb{i})}$$

konvergiert! ⑥

Lösung. 1. Im Teilbruchansatz

$$\frac{2\mathbb{i}}{(z - \mathbb{i})(z + \mathbb{i})} = \frac{a}{z - \mathbb{i}} + \frac{b}{z + \mathbb{i}}$$

werden die Koeffizienten $a, b \in \mathbb{C}$ bestimmt: Es gilt dann $a(z + \mathbb{i}) + b(z - \mathbb{i}) = 2\mathbb{i}$ für $z \in \mathbb{C}$, woraus sich durch Koeffizientenvergleich vor Termen gleicher Ordnung in z sogleich $a + b = \mathbb{0}$ sowie $(a - b)\mathbb{i} = 2\mathbb{i}$, also $a = \mathbb{1}$ und $b = -\mathbb{1}$ ergibt. Daraus folgt die Teilbruchzerlegung

$$s(z) = \frac{2\mathbb{i}}{(z - \mathbb{i})(z + \mathbb{i})} = \frac{\mathbb{1}}{z - \mathbb{i}} - \frac{\mathbb{1}}{z + \mathbb{i}} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{i}, -\mathbb{i}\}.$$

2. Um $s : \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{i}, -\mathbb{i}\} \to \mathbb{C}$ in eine Laurent-Reihe um den Punkt $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{i}, -\mathbb{i}\}$ mit $0 < r_0 = |\mathbb{i} - z_0| < r_1 = |-\mathbb{i} - z_0|$ zu entwickeln, betrachtet man die Darstellungen

$$s(z) = -\frac{\mathbb{1}}{\mathbb{i} - z_0} \frac{\mathbb{i} - z_0}{(\mathbb{i} - z_0) - (z - z_0)} - \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{i} + z_0} \frac{-\mathbb{i} - z_0}{(-\mathbb{i} - z_0) - (z - z_0)}$$

für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < r_0$,

$$s(z) = \frac{\mathbb{1}}{z - z_0} \frac{z - z_0}{(z - z_0) - (\mathbb{i} - z_0)} - \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{i} + z_0} \frac{-\mathbb{i} - z_0}{(-\mathbb{i} - z_0) - (z - z_0)}$$

für $z \in \mathbb{C}$ mit $r_0 < |z - z_0| < r_1$,

$$s(z) = \frac{\mathbb{1}}{z - z_0} \frac{z - z_0}{(z - z_0) - (\mathbb{i} - z_0)} - \frac{\mathbb{1}}{z - z_0} \frac{z - z_0}{(z - z_0) - (-\mathbb{i} - z_0)}$$

für $z \in \mathbb{C}$ mit $r_1 < |z - z_0|$.

3. Da die geometrische Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)$ für jedes $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 1$ gegen die Summe $\frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1}-x} \in \mathbb{C}$ konvergiert, ergibt sich daraus für $z \in \mathbb{C}$ zunächst

$$s(z) = -\frac{\mathbb{1}}{\mathbb{i} - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\mathbb{i} - z_0}\right)^k - \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{i} + z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{-\mathbb{i} - z_0}\right)^k \quad \text{für } |z - z_0| < r_0,$$

$$s(z) = \frac{\mathbb{1}}{z - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mathbb{i} - z_0}{z - z_0}\right)^k - \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{i} + z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{-\mathbb{i} - z_0}\right)^k \quad \text{für } r_0 < |z - z_0| < r_1,$$

$$s(z) = \frac{\mathbb{1}}{z - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mathbb{i} - z_0}{z - z_0}\right)^k - \frac{\mathbb{1}}{z - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-\mathbb{i} - z_0}{z - z_0}\right)^k \quad \text{für } r_1 < |z - z_0|.$$

und somit jeweils die Darstellung

$$s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mathbb{1}}{(-\mathbb{i} - z_0)^{k+1}} - \frac{\mathbb{1}}{(\mathbb{i} - z_0)^{k+1}}\right) (z - z_0)^k \quad \text{für } |z - z_0| < r_0,$$

$$s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathbb{i} - z_0)^{k-1}}{(z - z_0)^k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(-\mathbb{i} - z_0)^{k+1}} \quad \text{für } r_0 < |z - z_0| < r_1,$$

$$s(z) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\mathbb{i} - z_0)^{k-1} - (-\mathbb{i} - z_0)^{k-1}}{(z - z_0)^k} \quad \text{für } r_1 < |z - z_0|.$$

als Laurent-Reihe von $s : \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{i}, -\mathbb{i}\} \to \mathbb{C}$ um den Mittelpunkt z_0. $\square$

Aufgabe 2. Seien $k,\ \ell \in \mathbb{N}$ mit $0 < k < \ell$ sowie $w = \operatorname{Exp}\left(\frac{\pi}{\ell}\mathbb{i}\right) \in \mathbb{C}$ gegeben. Ferner werden für ein beliebig vorgegebenes $r > 1$ die Wege $\gamma_1, \gamma_2 : [0, r] \to \mathbb{C}$ sowie $\gamma_3 : \left[0, \frac{2\pi}{\ell}\right] \to \mathbb{C}$ und $\gamma_4 : \left[\frac{2\pi}{\ell}, 2\pi\right] \to \mathbb{C}$ betrachtet, die wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (t, 0) \quad \text{für } t \in [0, r], & \gamma_3(t) &= r\operatorname{Exp}(\mathbb{i}t) \quad \text{für } t \in \left[0, \tfrac{2\pi}{\ell}\right], \\ \gamma_2(t) &= tw^2 \quad \text{für } t \in [0, r], & \gamma_4(t) &= r\operatorname{Exp}(\mathbb{i}t) \quad \text{für } t \in \left[\tfrac{2\pi}{\ell}, 2\pi\right]. \end{aligned}$$

Man werte das Integral

$$\int_\gamma \frac{z^{k-1}\,dz}{z^\ell + \mathbb{1}} \in \mathbb{C}$$

längs des *geschlossenen* Weges $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_{2\ominus} : \left[0, 2r + \frac{2\pi}{\ell}\right] \to \mathbb{C}$ aus und schließe daraus auf den Wert

$$\int_0^\infty \frac{t^{k-1}\,dt}{t^\ell + 1} = \frac{\pi}{\ell \sin\frac{\pi k}{\ell}}$$

des uneigentlichen Integrals! ⑧

Lösung. 1. Die durch $h(z) = z^\ell + \mathbb{1}$ definierte ganze rationale Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hat die *einfachen* Nullstellen $z_m = \operatorname{Exp}\left(\frac{\pi}{\ell}\mathbb{i} + \frac{2\pi m}{\ell}\mathbb{i}\right)$ für $m \in \{0, 1, \ldots, \ell - 1\}$. Dabei ist $w = z_0 = \operatorname{Exp}\left(\frac{\pi}{\ell}\mathbb{i}\right)$ die *einzige* Nullstelle von h, die vom Weg γ umschlungen wird. Man definiert die analytische Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_{\ell-1}\} \to \mathbb{C}$ durch

$$f(z) = \frac{z^{k-1}}{\sum_{m=0}^{\ell-1} z^{\ell-1-m} w^m}$$

und erhält

$$\frac{f(z)}{z - w} = \frac{z^{k-1}}{(z - w)\sum_{m=0}^{\ell-1} z^{\ell-1-m} w^m} = \frac{z^{k-1}}{z^\ell - w^\ell} = \frac{z^{k-1}}{z^\ell + \mathbb{1}}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_{\ell-1}\}$. Die Integralformel von Cauchy liefert die Darstellung

$$\int_\gamma \frac{z^{k-1}dz}{z^\ell + \mathbb{1}} = \int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z - w} = \int_\gamma \frac{f(w)\,dz}{z - w} = \frac{w^{k-\ell}}{\ell}\int_\gamma \frac{dz}{z - w} = -\frac{w^k}{\ell}\int_\gamma \frac{dz}{z - w}\,.$$

Da für die zusammengesetzten Wege $\sigma = \gamma_2 \oplus \gamma_4 \oplus \gamma_{1\ominus} : \left[0, 2r + 2\pi - \frac{2\pi}{\ell}\right] \to \mathbb{C}$ und $\varkappa = \gamma_3 \oplus \gamma_4 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ aufgrund des Integralsatzes von Cauchy

$$\int_\gamma \frac{dz}{z - w} = \int_\gamma \frac{dz}{z - w} + \int_\sigma \frac{dz}{z - w} = \int_\varkappa \frac{dz}{z - w} = 2\pi\mathbb{i}$$

gilt, ergibt sich daraus

$$\int_\gamma \frac{z^{k-1}dz}{z^\ell + \mathbb{1}} = -\frac{2\pi\mathbb{i}\,w^k}{\ell}\,.$$

2. Andererseits gilt wegen $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_{2\ominus}$ die Zerlegung

$$\int_\gamma \frac{z^{k-1}dz}{z^\ell + \mathbb{1}} = \int_{\gamma_1} \frac{z^{k-1}dz}{z^\ell + \mathbb{1}} - \int_{\gamma_2} \frac{z^{k-1}dz}{z^\ell + \mathbb{1}} + \int_{\gamma_3} \frac{z^{k-1}dz}{z^\ell + \mathbb{1}}$$
$$= \left(\mathbb{1} - w^{2k}\right) \int_0^r \frac{t^{k-1}dt}{t^\ell + 1} + \int_{\gamma_3} \frac{z^{k-1}dz}{z^\ell + \mathbb{1}}\,.$$

Da sich für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = r$ aus

$$\left|\frac{z^{k-1}}{z^\ell + \mathbb{1}}\right| = \left|\frac{z^{k-1}}{z^\ell - w^\ell}\right| \leq \frac{|z|^{k-1}}{|z|^\ell - |w|^\ell} = \frac{r^{k-1}}{r^\ell - 1}$$

stets die Abschätzung

$$\left|\int_{\gamma_3} \frac{z^{k-1}dz}{z^\ell + \mathbb{1}}\right| \leq \frac{2\pi}{\ell}\frac{r^k}{r^\ell - 1}$$

ergibt und außerdem wegen $0 < k < \ell$ auch

$$\lim_{r\to\infty} \frac{2\pi}{\ell}\frac{r^k}{r^\ell - 1} = 0$$

gilt, folgt mit Schritt 1 daraus

$$\left(w^{2k} - \mathbb{1}\right) \int_0^\infty \frac{t^{k-1}dt}{t^\ell + 1} = \frac{2\pi\,\mathbb{i}\,w^k}{\ell}$$

und somit schließlich

$$\int_0^\infty \frac{t^{k-1}dt}{t^\ell + 1} = \frac{2\pi\,\mathbb{i}}{\ell\left(w^k - w^{-k}\right)} = \frac{2\pi\,\mathbb{i}}{\ell\left(\operatorname{Exp}\left(\frac{\pi k}{\ell}\mathbb{i}\right) - \operatorname{Exp}\left(-\frac{\pi k}{\ell}\mathbb{i}\right)\right)} = \frac{\pi}{\ell \sin \frac{\pi k}{\ell}}$$

für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$ mit $0 < k < \ell$. $\square$

Aufgabe 3. Seien $n \in \mathbb{N}$ sowie $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ die (nicht notwendig voneinander verschiedenen) Nullstellen der durch $f(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - z_k)$ für $z \in \mathbb{C}$ definierten ganzen rationalen Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

1. Man zeige (induktiv), daß

$$Df(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(z)}{z - z_k} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ gilt!}$$

2. Man weise nach, daß zu jeder Nullstelle $z \in \mathbb{C}$ der Ableitung $Df : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ mit $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ existieren, so daß $z = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k$ gilt! ⑥

Lösung. 1. Die erste Aussage soll induktiv über $n \in \mathbb{N}$ bewiesen werden:

Induktionsanfang: Im Falle $n = 1$ gilt $f(z) = z - z_1$ und somit tatsächlich

$$Df(z) = \mathbb{1} = \frac{f(z)}{z - z_1} \quad \text{für jedes } z \in \mathbb{C}.$$

Induktionsschritt: Unter der Annahme der Induktionsvoraussetzung, daß für die durch $g(z) = \prod_{k=1}^{n-1}(z - z_k)$ für $z \in \mathbb{C}$ gegebene Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stets

$$Dg(z) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g(z)}{z - z_k} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

gilt, soll die Induktionsbehauptung für f bewiesen werden: Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $f(z) = (z - z_n)g(z)$ und somit

$$Df(z) = g(z) + (z - z_n)Dg(z) = \frac{f(z)}{z - z_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(z - z_n)g(z)}{z - z_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(z)}{z - z_k},$$

womit die Induktionsbehaupung bewiesen ist.

2. Ist $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle der Ableitung $Df : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dann sollen die beiden Fälle $f(z) = \mathbb{0}$ bzw. $f(z) \neq \mathbb{0}$ unterschieden werden:

2.1. Gilt $f(z) = \mathbb{0}$, so existiert ein $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ mit $z = z_\ell$, und man setzt $\lambda_\ell = 1$ und $\lambda_k = 0$ für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $k \neq \ell$. Es folgt unmittelbar $z = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k$.

2.2. Im Falle $f(z) \neq \mathbb{0}$ gibt es *kein* $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $z = z_k$, woraus sich wegen $Df(z) = \mathbb{0}$ und Schritt 1 die Beziehung

$$\mathbb{0} = \frac{Df(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{1}}{z - z_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z} - \overline{z}_k}{|z - z_k|^2} \quad \text{und somit auch} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{z - z_k}{|z - z_k|^2} = \mathbb{0}$$

ergibt. Setzt man

$$\beta_k = \frac{1}{|z - z_k|^2} > 0 \quad \text{für } k \in \{1, \ldots, n\} \quad \text{sowie} \quad \beta = \sum_{k=1}^{n} \beta_k > 0,$$

dann folgt $\beta z = \sum_{k=1}^{n} \beta_k z = \sum_{k=1} \beta_k z_k$. Definiert man $\lambda_k = \frac{\beta_k}{\beta} \in [0, 1]$ für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$, so erhält man $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ und $z = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k$. □

Aufgabe 4. Man berechne jene Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{Z}$, für welche die Laurent-Reihe $\left(\sum_{k=m}^{n} a_k \xi^k\right)$ im Grenzprozeß $n \to \infty$, $m \to -\infty$ für jedes $\xi \in \mathbb{C}$ im

1. Punktierten Kreis $\left\{\xi \in \mathbb{C} \mid 0 < |\xi| < 1\right\}$,
2. Kreisring $\left\{\xi \in \mathbb{C} \mid 1 < |\xi| < 2\right\}$,
3. Kreisäußeren $\left\{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi| > 2\right\}$,

jeweils gegen den Grenzwert

$$s(\xi) = \frac{\mathbb{6}}{\xi(\xi + \mathbb{1})(\xi - \mathbb{2})}$$

konvergiert!

Lösung. 1. Im Teilbruchansatz

$$\frac{\mathbb{6}}{\xi(\xi + \mathbb{1})(\xi - \mathbb{2})} = \frac{a}{\xi} + \frac{b}{\xi + \mathbb{1}} + \frac{c}{\xi - \mathbb{2}} \quad \text{für } \xi \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}, -\mathbb{1}, \mathbb{2}\}$$

werden die drei Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{C}$ bestimmt: Dann gilt

$$a(\xi + \mathbb{1})(\xi - \mathbb{2}) + b\xi(\xi - \mathbb{2}) + c\xi(\xi + \mathbb{1}) = \mathbb{6} \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{C},$$

woraus sich durch Koeffizientenvergleich vor Termen gleicher Ordnung in ξ die Gleichungen $-\mathbb{2}a = \mathbb{6}$, $-a - \mathbb{2}b + c = \mathbb{0}$ und $a + b + c = \mathbb{0}$, also $a = -\mathbb{3}$ sowie $-\mathbb{2}b + c = -\mathbb{3}$ und $b + c = \mathbb{3}$ ergeben. Daraus folgt $b = \mathbb{2}$ und $c = \mathbb{1}$ und somit

$$s(\xi) = \frac{\mathbb{6}}{\xi(\xi + \mathbb{1})(\xi - \mathbb{2})} = -\frac{\mathbb{3}}{\xi} + \frac{\mathbb{2}}{\xi + \mathbb{1}} + \frac{\mathbb{1}}{\xi - \mathbb{2}} \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}, -\mathbb{1}, \mathbb{2}\}.$$

2. Um die Funktion $s : \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}, -\mathbb{1}, \mathbb{2}\} \to \mathbb{C}$ in eine Laurent-Reihe um den Mittelpunkt $\mathbb{0}$ zu entwickeln, betrachtet man die Darstellungen

$$\begin{aligned}
s(\xi) &= -\frac{\mathbb{3}}{\xi} + \frac{\mathbb{2}}{\mathbb{1} - (-\xi)} - \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{2}} \cdot \frac{\mathbb{2}}{\mathbb{2} - \xi} && \text{für } \xi \in \mathbb{C},\, 0 < |\xi| < 1,\\
s(\xi) &= -\frac{\mathbb{3}}{\xi} + \frac{\mathbb{2}}{\xi} \cdot \frac{\xi}{\xi - (-\mathbb{1})} - \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{2}} \cdot \frac{\mathbb{2}}{\mathbb{2} - \xi} && \text{für } \xi \in \mathbb{C},\, 1 < |\xi| < 2,\\
s(\xi) &= -\frac{\mathbb{3}}{\xi} + \frac{\mathbb{2}}{\xi} \cdot \frac{\xi}{\xi - (-\mathbb{1})} + \frac{\mathbb{1}}{\xi} \cdot \frac{\xi}{\xi - \mathbb{2}} && \text{für } \xi \in \mathbb{C},\, |\xi| > 2.
\end{aligned}$$

3. Da die geometrische Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)$ für jedes $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 1$ gegen die Summe $\frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1} - x} \in \mathbb{C}$ konvergiert, ergibt sich daraus zunächst

$$\begin{aligned}
s(\xi) &= -\frac{\mathbb{3}}{\xi} + \mathbb{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-\xi)^k - \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\xi}{\mathbb{2}}\right)^k && \text{für } \xi \in \mathbb{C},\, 0 < |\xi| < 1,\\
s(\xi) &= -\frac{\mathbb{3}}{\xi} + \frac{\mathbb{2}}{\xi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbb{1}}{(-\xi)^k} - \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\xi}{\mathbb{2}}\right)^k && \text{für } \xi \in \mathbb{C},\, 1 < |\xi| < 2,\\
s(\xi) &= -\frac{\mathbb{3}}{\xi} + \frac{\mathbb{2}}{\xi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbb{1}}{(-\xi)^k} + \frac{\mathbb{1}}{\xi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\mathbb{2}}{\xi}\right)^k && \text{für } \xi \in \mathbb{C},\, |\xi| > 2.
\end{aligned}$$

Daraus folgt schließlich jeweils die Darstellung

$$s(\xi) = -\frac{\mathbb{3}}{\xi} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(2 \cdot (-1)^k - \frac{1}{2^{k+1}} \right) \xi^k \qquad \text{für } \xi \in \mathbb{C},\ 0 < |\xi| < 1,$$

$$s(\xi) = -\frac{\mathbb{1}}{\xi} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{k-1}}{\xi^k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^k}{2^{k+1}} \qquad \text{für } \xi \in \mathbb{C},\ 1 < |\xi| < 2,$$

$$s(\xi) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{k-1} + 2^{k-1}}{\xi^k} \qquad \text{für } \xi \in \mathbb{C},\ |\xi| > 2$$

als Laurent-Reihe von $s : \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}, -\mathbb{1}, \mathbb{2}\} \to \mathbb{C}$ um den Mittelpunkt $\mathbb{0}$. □

Aufgabe 5. Seien Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ sowie die ganze rationale Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ für $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

Man zeige (mit Hilfe des Fundamentalsatzes der Algebra), daß es Zahlen $\ell, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $\ell + 2m = n$ und $x_1, \ldots, x_\ell \in \mathbb{R}$, $y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{R}$, $d_1, \ldots, d_m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt, so daß f die Darstellung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n \prod_{k=1}^{\ell} (x - x_k) \cdot \prod_{k=1}^{m} \big((x - y_k)^2 + d_k^2\big) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

als Produkt linearer und quadratischer Faktoren besitzt!

Lösung. 1. Definiert man durch $g(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k$ für $z \in \mathbb{C}$ die ganze rationale Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, so gilt wegen $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ genau dann $g(z) = \mathbb{0}$, wenn $g(\overline{z}) = \mathbb{0}$ gilt. Da g wegen des Fundamentalsatzes der Algebra genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$ besitzt, folgt daraus, daß es Zahlen $\ell, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $\ell + 2m = n$ sowie $w_1, \ldots, w_\ell \in \mathbb{C}$ mit $w_k = (x_k, 0)$ für $k \in \{1, \ldots, \ell\}$ und $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{C}$ mit $z_k = (y_k, d_k)$ und $d_k \neq 0$ für $k \in \{1, \ldots, m\}$ gibt, so daß die Darstellung

$$g(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_n \prod_{k=1}^{\ell} (z - w_k) \cdot \prod_{k=1}^{m} (z - z_k)(z - \overline{z}_k) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ gilt.}$$

2. Für alle $z = (x, 0) \in \mathbb{C}$ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} g(z) &= a_n \prod_{k=1}^{\ell} (x - x_k, 0) \cdot \prod_{k=1}^{m} (x - y_k, -d_k)(x - y_k, d_k) \\ &= a_n \prod_{k=1}^{\ell} (x - x_k, 0) \cdot \prod_{k=1}^{m} \big((x - y_k)^2 + d_k^2, 0\big) \end{aligned}$$

und somit schließlich

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n \prod_{k=1}^{\ell} (x - x_k) \cdot \prod_{k=1}^{m} \big((x - y_k)^2 + d_k^2\big)$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$. □

Aufgabe 6. Sei $w = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\mathrm{Exp}\big(\frac{\pi}{4}\mathbb{i}\big) \in \mathbb{C}$ gegeben. Ferner werden für beliebig vorgegebenes $r > 0$ die Wege $\gamma_1, \gamma_3 : [0,1] \to \mathbb{C}$ sowie $\gamma_2, \gamma_4 : [-r, r] \to \mathbb{C}$ durch

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (r,0) + 2tw, & \gamma_3(t) &= (-r,0) + 2tw & &\text{für } t \in [0,1], \\ \gamma_2(t) &= (t,0) + 2w, & \gamma_4(t) &= (t,0) & &\text{für } t \in [-r,r], \end{aligned}$$

definiert. Sei desweiteren die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \big\{(1+2n)w \in \mathbb{C} \mid n \in \mathbb{Z}\big\} \to \mathbb{C}$ durch

$$f(z) = \frac{\mathrm{Exp}(-z^2)}{\mathbb{1} + \mathrm{Exp}(-4wz)} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \big\{(1+2n)w \in \mathbb{C} \mid n \in \mathbb{Z}\big\} \text{ gegeben.}$$

Man werte das Integral $\int_\gamma f(z)\,dz$ längs des *geschlossenen* Weges

$$\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_{2\ominus} \oplus \gamma_{3\ominus} \oplus \gamma_4 : [0, 2+4r] \to \mathbb{C}$$

aus und schließe daraus, daß $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2)\,dt = \sqrt{\pi}$ gilt!

Lösung. 1. Sei $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ für $z \in \mathbb{C}$ durch $h(z) = \mathbb{1} + \mathrm{Exp}(-4wz)$ definiert. Die Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist genau dann eine Nullstelle von h, wenn es ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $4wz = \pi\mathbb{i} + 2\pi\mathbb{i}n$, also $\pi\mathbb{i}z = 4w^2 z = (1+2n)\pi\mathbb{i}w$ und somit $z = (1+2n)w$ gibt.

Dabei ist $w \in \mathbb{C}$ die *einzige* Nullstelle von h, die vom geschlossenen Streckenzug γ umschlungen wird. Da $h(z) = \mathbb{1} - \mathrm{Exp}(-4w(z-w))$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt, ist w eine *einfache* Nullstelle von h. Genauer gesagt, erhält man den Grenzwert

$$\lim_{z \to w} \frac{h(z)}{z-w} = \lim_{z \to w} \frac{h(z) - h(w)}{z-w} = 4w$$

und somit auch

$$\lim_{z \to w} (z-w) f(z) = \lim_{z \to w} \frac{(z-w)\,\mathrm{Exp}(-z^2)}{h(z)} = \frac{\mathrm{Exp}(-w^2)}{4w} = \frac{\mathbb{1}}{2\mathbb{i}\sqrt{\pi}}.$$

Die Integralformel von Cauchy liefert daher wegen $\mathrm{ind}(\gamma, w) = 1$ die Darstellung

$$\frac{\mathbb{1}}{2\pi\mathbb{i}} \int_\gamma f(z)\,dz = \frac{\mathbb{1}}{2\pi\mathbb{i}} \int_\gamma \frac{(z-w) f(z)\,dz}{z-w} = \frac{\mathbb{1}}{2\mathbb{i}\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\mathbb{1}}{2\pi\mathbb{i}} \int_\gamma \frac{dz}{z-w} = \frac{\mathbb{1}}{2\mathbb{i}\sqrt{\pi}}.$$

2. Andererseits gilt wegen $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_{2\ominus} \oplus \gamma_{3\ominus} \oplus \gamma_4$ die Zerlegung

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)\,dz &= \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_3} f(z)\,dz + \int_{\gamma_4} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \\ &= \int_0^1 \frac{2w\exp(-r^2)\,\mathrm{Exp}(-4rtw)\,\mathrm{Exp}(-\pi\mathbb{i}t^2)\,dt}{\mathbb{1} + \mathrm{Exp}(-4rw)\,\mathrm{Exp}(-2\pi\mathbb{i}t)} \\ &\quad - \int_0^1 \frac{2w\exp(-r^2)\,\mathrm{Exp}(-4r(1-t)w)\,\mathrm{Exp}(-\pi\mathbb{i}t^2)\,dt}{\mathrm{Exp}(-2\pi\mathbb{i}t) + \mathrm{Exp}(-4rw)} \\ &\quad + \int_{\gamma_4} \big(f(z) - f(z+2w)\big)\,dz. \end{aligned}$$

2.1. Es soll gezeigt werden, daß die beiden ersten Integrale auf der rechten Seite der letzten Ungleichung im Grenzprozeß $r \to \infty$ verschwinden: Aus der Beziehung $|\operatorname{Exp}(-4rw)| = \exp\left(-r\sqrt{2\pi}\right) < 1$ folgen die Abschätzungen

$$|\mathbb{1} + \operatorname{Exp}(-4rw)\operatorname{Exp}(-2\pi\mathbb{i}t)| \geq 1 - \exp\left(-r\sqrt{2\pi}\right),$$
$$|\operatorname{Exp}(-2\pi\mathbb{i}t) + \operatorname{Exp}(-4rw)| \geq 1 - \exp\left(-r\sqrt{2\pi}\right)$$

und damit wegen $|\operatorname{Exp}(-4rsw)| = \exp\left(-rs\sqrt{2\pi}\right) \leq 1$ für $s \geq 0$ tatsächlich

$$\left|\int_0^1 \frac{2w\exp(-r^2)\operatorname{Exp}(-4rtw)\operatorname{Exp}(-\pi\mathbb{i}t^2)\,dt}{\mathbb{1} + \operatorname{Exp}(-4rw)\operatorname{Exp}(-2\pi\mathbb{i}t)}\right| \leq \frac{2|w|\exp(-r^2)}{1 - \exp\left(-r\sqrt{2\pi}\right)},$$
$$\left|\int_0^1 \frac{2w\exp(-r^2)\operatorname{Exp}(-4r(1-t)w)\operatorname{Exp}(-\pi\mathbb{i}t^2)\,dt}{\operatorname{Exp}(-2\pi\mathbb{i}t) + \operatorname{Exp}(-4rw)}\right| \leq \frac{2|w|\exp(-r^2)}{1 - \exp\left(-r\sqrt{2\pi}\right)}.$$

2.2. Beachtet man die für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{w + 2nw \in \mathbb{C} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ geltende Identität

$$\begin{aligned} f(z) - f(z+2w) &= \frac{\operatorname{Exp}(-z^2)}{\mathbb{1} + \operatorname{Exp}(-4wz)} - \frac{\operatorname{Exp}(-(z+2w)^2)}{\mathbb{1} + \operatorname{Exp}(-4w(z+2w))} \\ &= \frac{\operatorname{Exp}(-z^2)(\mathbb{1} + \operatorname{Exp}(-4wz))}{\mathbb{1} + \operatorname{Exp}(-4wz)} = \operatorname{Exp}(-z^2) \end{aligned}$$

im Integranden des dritten Integrals auf der rechten Seite der Ungleichung, so folgt durch die Auswertung der Realteile im Grenzprozeß $r \to \infty$ schließlich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2)\,dt = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \exp(-t^2)\,dt = \sqrt{\pi},$$

da der Integrand eine *gerade* Funktion ist. □