Übungsaufgaben 2

Komplexe Zahlen

Aufgabe 1. Man bestimme alle diejenigen komplexen Zahlen $u \in \mathbb{C}$, welche die Gleichung $u^2 - (6,4) \cdot u = (-5,-14)$ lösen! ⑥

Lösung. 1. Durch quadratische Ergänzung auf der linken Seite der Gleichung ergibt sich für die neue Unbekannte $z = u - (3,2) \in \mathbb{C}$ die Gleichung

$$z^2 = (u - (3,2))^2 = (-5,-14) + (3,2)^2 = (-5,-14) + (5,12) = (0,-2).$$

2. Stellt man die rechte Seite $w = (r\cos\alpha, r\sin\alpha) = (0,-2)$ in Polarkoordinaten $r = |w| = 2$ und $\alpha \in [\pi, 2\pi]$ dar, dann sind

$$z_0 = \sqrt{r}\left(\cos\tfrac{\alpha}{2}, \sin\tfrac{\alpha}{2}\right) \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad z_1 = \sqrt{r}\left(\cos(\pi + \tfrac{\alpha}{2}), \sin(\pi + \tfrac{\alpha}{2})\right) = -z_0 \in \mathbb{C}$$

die beiden Lösungen der Gleichung $z^2 = w$. Der Punkt $\left(\cos\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\alpha}{2}\right)$ kann wegen der Lage des Winkels $\frac{\alpha}{2} \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ eindeutig aus $(\cos\alpha, \sin\alpha) = (0,-1)$ mit Hilfe der Beziehungen $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ und $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ bestimmt werden:

Aus $2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha = 1$ folgt $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$ und damit $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ wegen $\frac{\alpha}{2} \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Aus $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha = -1$ ergibt sich demnach $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, das heißt, die Gleichung $z^2 = w$ hat die beiden Lösungen

$$z_0 = \sqrt{2}\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) = (-1,1) \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad z_1 = -z_0 = (1,-1) \in \mathbb{C}.$$

3. Somit sind

$$u_0 = (3,2) + z_0 = (3,2) + (-1,1) = (2,3) \in \mathbb{C},$$
$$u_1 = (3,2) + z_1 = (3,2) + (1,-1) = (4,1) \in \mathbb{C}$$

die beiden Lösungen der Gleichung $u^2 - (6,4) \cdot u = (-5,-14)$. □

Aufgabe 2. Man zeige mit Hilfe der Additionstheoreme, daß die beiden Beziehungen

$$\sum_{\ell=0}^{n} \cos 2\ell x \sin x = \sin(n+1)x \cos nx,$$
$$\sum_{\ell=0}^{n} \sin 2\ell x \sin x = \sin(n+1)x \sin nx$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gelten! ⑧

Lösung. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig vorgegeben.

1. Da sich aus den beiden Additionstheoremen

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta,$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ durch Subtraktion die Additionstheoreme

$$\text{(C)} \qquad 2\cos\alpha \sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta),$$
$$\text{(S)} \qquad 2\sin\alpha \sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

ergeben, erhält man für $\alpha = 2\ell x$, $\ell \in \{0, \ldots, n\}$ und $\beta = x$ durch Indexverschiebung

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=0}^{n} 2\cos 2\ell x \sin x &= \sum_{\ell=0}^{n} (\sin(2\ell+1)x - \sin(2\ell-1)x) \\ &= \sum_{\ell=1}^{n+1} \sin(2\ell-1)x - \sum_{\ell=0}^{n} \sin(2\ell-1)x = \sin(2n+1)x + \sin x\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=0}^{n} 2\sin 2\ell x \sin x &= \sum_{\ell=0}^{n} (\cos(2\ell-1)x - \cos(2\ell+1)x) \\ &= \sum_{\ell=0}^{n} \cos(2\ell-1)x - \sum_{\ell=1}^{n+1} \cos(2\ell-1)x = \cos x - \cos(2n+1)x\end{aligned}$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$. Wendet man das Additionstheorem (C) für $\alpha = nx$ und $\beta = (n+1)x$ bzw. (S) für $\alpha = (n+1)x$ und $\beta = nx$ an, dann folgen daraus die beiden Beziehungen

$$\sum_{\ell=0}^{n} \cos 2\ell x \sin x = \sin(n+1)x \cos nx,$$
$$\sum_{\ell=0}^{n} \sin 2\ell x \sin x = \sin(n+1)x \sin nx$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$. □

Alternative Lösung. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig vorgegeben.

1. Im Falle $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ gilt stets $\sin x = 0$ und $\sin(n+1)x = 0$, woraus sich sofort die beiden gewünschten Beziehungen ergeben.

2. Sei also fortan $x \in \mathbb{R}$ derart vorgegeben, daß $x \neq k\pi$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gilt. Aufgrund der Moivre-Formel und der Formel für die geometrische Summe folgt daraus für die komplexe Zahl $v = (\cos x, \sin x) \in \mathbb{C}$ wegen $v^2 \neq \mathbb{1}$ die Beziehung

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=0}^{n}(\cos 2\ell x, \sin 2\ell x) &= \sum_{\ell=0}^{n} v^{2\ell} = \frac{\mathbb{1} - v^{2(n+1)}}{\mathbb{1} - v^2} \\ &= \frac{(1 - \cos 2(n+1)x, -\sin 2(n+1)x)}{(1 - \cos 2x, -\sin 2x)}\,.\end{aligned}$$

Da $1 - \cos 2y = 2\sin^2 y$ und $\sin 2y = 2 \sin y \cos y$ für jedes $y \in \mathbb{R}$ gilt, ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=0}^{n}(\cos 2\ell x, \sin 2\ell x) &= \frac{(2\sin^2(n+1)x, -2\sin(n+1)x\cos(n+1)x)}{(2\sin^2 x, -2\sin x\cos x)} \\ &= \frac{\sin(n+1)x}{\sin x} \cdot \frac{(\sin(n+1)x, -\cos(n+1)x)}{(\sin x, -\cos x)} \cdot \frac{(\sin x, \cos x)}{(\sin x, \cos x)}\end{aligned}$$

durch Erweiterung von Zähler und Nenner mit $v = (\sin x, \cos x) \neq \mathbb{0}$. Aufgrund der Beziehung $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ und der Additionstheoreme

$$\begin{aligned}\cos nx &= \cos(n+1)x\cos x + \sin(n+1)x \sin x \\ \sin nx &= \sin(n+1)x \cos x - \cos(n+1)x \sin x\end{aligned}$$

folgt daraus

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=0}^{n}(\cos 2\ell x, \sin 2\ell x) &= \frac{\sin(n+1)x}{\sin x} \cdot (\sin(n+1)x, -\cos(n+1)x) \cdot (\sin x, \cos x) \\ &= \frac{\sin(n+1)x}{\sin x} \cdot (\cos nx, \sin nx),\end{aligned}$$

woraus sich die gesuchten Beziehungen durch Vergleich von Real- und Imaginärteil auf beiden Seiten der Gleichung ergeben. □

Aufgabe 3. Sei die gebrochene rationale Abbildung $g : \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}\} \to \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}\}$ durch

$$g(v) = \frac{\mathbb{1}}{v} \quad \text{für } v \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}\}$$

definiert und eine Kreislinie $S = \left\{v \in \mathbb{C} \mid |v - v_0|^2 = r^2\right\}$ mit dem Mittelpunkt $v_0 \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}\}$ und dem Radius $r \in \left]0, |v_0|\right[$ vorgegeben. Man weise nach, daß das Bild $g[S] = \left\{g(v) \in \mathbb{C} \mid v \in S\right\}$ von S eine Kreislinie $K = \left\{w \in \mathbb{C} \mid |w - w_0|^2 = \rho^2\right\}$ mit dem Mittelpunkt $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}\}$ und dem Radius $\rho \in \left]0, |w_0|\right[$ ist, welche durch

$$w_0 = \frac{\overline{v}_0}{|v_0|^2 - r^2} \quad \text{und} \quad \rho = \frac{r}{|v_0|^2 - r^2}$$

gegeben sind! ⑥

Lösung. 1. Zuerst soll gezeigt werden, daß das Bild $g[S]$ der Kreislinie S in der Kreislinie K enthalten ist: Für alle $v \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}\}$ gilt wegen $v\overline{v} = (|v|^2, 0)$ zunächst

$$\begin{aligned}
(g(v) - w_0) \cdot \overline{(g(v) - w_0)} &= \left(\frac{\overline{v}}{|v|^2} - \frac{\overline{v}_0}{|v_0|^2 - r^2}\right) \cdot \left(\frac{v}{|v|^2} - \frac{v_0}{|v_0|^2 - r^2}\right) \\
&= \frac{v\overline{v}}{|v|^4} - \frac{v\overline{v}_0 + \overline{v}v_0}{|v|^2(|v_0|^2 - r^2)} + \frac{v_0\overline{v}_0}{(|v_0|^2 - r^2)^2} \\
&= \frac{(v - v_0) \cdot \overline{(v - v_0)}}{|v|^2(|v_0|^2 - r^2)} + \left(\frac{v\overline{v}}{|v|^4} - \frac{v\overline{v}}{|v|^2(|v_0|^2 - r^2)}\right) \\
&\quad + \left(\frac{v_0\overline{v}_0}{(|v_0|^2 - r^2)^2} - \frac{v_0\overline{v}_0}{|v|^2(|v_0|^2 - r^2)}\right).
\end{aligned}$$

Da die linke Seite sowie die Zähler der Brüche auf der rechten Seite jeweils die Form $w\overline{w} = (|w|^2, 0)$ für ein $w \in \mathbb{C}$ besitzen, erhält man für $v \in \mathbb{C}$ mit $|v - v_0|^2 = r^2$

$$\begin{aligned}
|g(v) - w_0|^2 &= \frac{|v - v_0|^2}{|v|^2(|v_0|^2 - r^2)} + \left(\frac{|v_0|^2}{|v_0|^2 - r^2} - 1\right)\left(\frac{1}{|v_0|^2 - r^2} - \frac{1}{|v|^2}\right) \\
&= \frac{|v - v_0|^2 - r^2}{|v|^2(|v_0|^2 - r^2)} + \frac{r^2}{(|v_0|^2 - r^2)^2} = \frac{r^2}{(|v_0|^2 - r^2)^2} = \rho^2
\end{aligned}$$

und somit $g(v) \in K$ für jedes $v \in S$.

2. Da sich umgekehrt aus

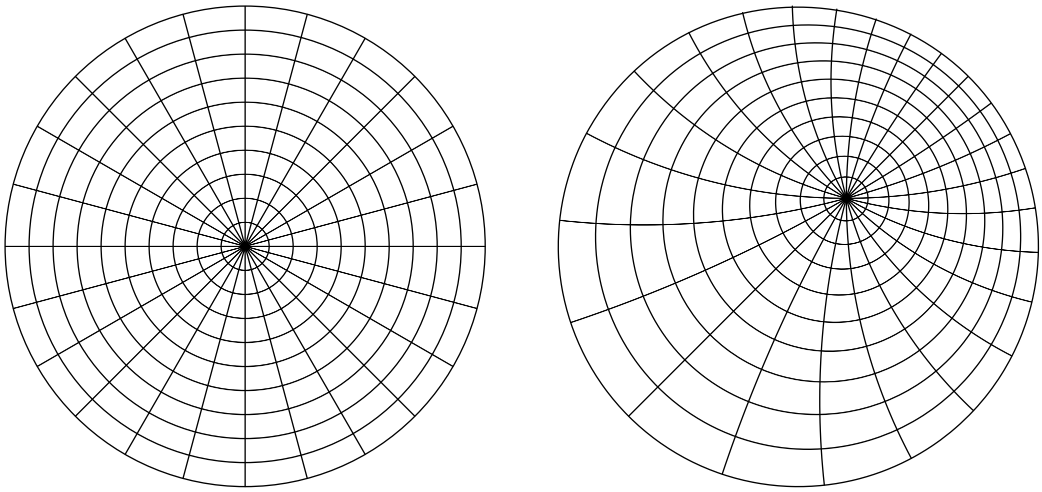
$$|w_0|^2 - \rho^2 = \frac{1}{|v_0|^2 - r^2} \quad \text{sowohl} \quad \frac{\overline{w}_0}{|w_0|^2 - \rho^2} = v_0 \quad \text{als auch} \quad \frac{\rho}{|w_0|^2 - \rho^2} = r$$

ergibt, folgt aus Schritt 1, daß das Bild $g[K]$ der Kreislinie K in der Kreislinie S enthalten ist. Da die Abbildung $g : \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}\} \to \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}\}$ mit ihrer Inversen g^{-1} übereinstimmt, erhält man schließlich $K = (g \circ g)[K] \subset g[S] \subset K$ und damit $g[S] = K$. □

Aufgabe 4. Sei $\mathbb{E} = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$ der offene Einheitskreis, ferner ein Punkt $z \in \mathbb{E}$ beliebig vorgegeben und die gebrochene rationale Abbildung $g : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ durch

$$g(x) = \frac{x - z}{\overline{z}x - \mathbb{1}} \quad \text{für } x \in \mathbb{E} \text{ definiert.}$$

1. Man zeige zuerst, daß die Bildmenge $g[\mathbb{E}] = \{g(x) \in \mathbb{C} \mid x \in \mathbb{E}\}$ in $\mathbb{E}$ liegt!
2. Man beweise anschließend, daß $g(g(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{E}$ gilt!
3. Man weise schließlich nach, daß $g : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ bijektiv ist!



Lösung. 1. Die Abbildung $g : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ ist korrekt definiert, da $|\overline{z}x| = |z||x| < 1$ für alle $z, x \in \mathbb{E}$ gilt. Um zu zeigen, daß $g[\mathbb{E}]$ in $\mathbb{E}$ enthalten ist, betrachtet man

$$g(x) \cdot \overline{g(x)} = \frac{x - z}{\overline{z}x - \mathbb{1}} \cdot \frac{\overline{x} - \overline{z}}{z\overline{x} - \mathbb{1}} = \frac{x\overline{x} - z\overline{x} - \overline{z}x + z\overline{z}}{\overline{z}z\,\overline{x}x - \overline{z}x - z\overline{x} + \mathbb{1}} = \mathbb{1} - \frac{(\mathbb{1} - x\overline{x})(\mathbb{1} - z\overline{z})}{(\overline{z}x - \mathbb{1})(x\overline{z} - \mathbb{1})}$$

für jedes $x \in \mathbb{E}$. Da die linke Seite sowie Zähler und Nenner des Bruchs auf der rechten Seite jeweils die Form $w\overline{w} = (|w|^2, 0)$ für ein $w \in \mathbb{C}$ besitzen, folgt daraus

$$|g(x)|^2 = 1 - \frac{(1 - |x|^2)(1 - |z|^2)}{|\overline{z}x - \mathbb{1}|^2} < 1 \quad \text{und damit } g(x) \in \mathbb{E} \text{ für alle } x \in \mathbb{E}.$$

2. Desweiteren gilt die Beziehung

$$g(g(x)) = \frac{g(x) - z}{\overline{z}g(x) - \mathbb{1}} = \frac{(x - z) - z(\overline{z}x - \mathbb{1})}{\overline{z}(x - z) - (\overline{z}x - \mathbb{1})} = \frac{x(\mathbb{1} - z\overline{z})}{\mathbb{1} - z\overline{z}} = x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{E}.$$

3.1. Wird $x \in \mathbb{E}$ beliebig vorgegeben, dann gilt für $w = g(x) \in \mathbb{E}$ stets

$$g(w) = g(g(x)) = x,$$

das heißt, $g : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ ist surjektiv.

3.2. Sind $x, y \in \mathbb{E}$ Punkte mit $g(x) = g(y)$, dann ergibt sich aus

$$x = g(g(x)) = g(g(y)) = y,$$

daß $g : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ auch injektiv ist. □

Aufgabe 5. Man zeige (mit Hilfe der binomischen und der Moivre-Formel), daß

(1) $(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha) = \big(2\cos^2\alpha - 1, 2\sin\alpha\cos\alpha\big) = \big(1 - 2\sin^2\alpha, 2\sin\alpha\cos\alpha\big)$

(2) $(\cos 3\alpha, \sin 3\alpha) = \big(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha, 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha\big)$

für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt!

Lösung. 1. Im Falle $n = 2$ liefert die Moivre-Formel für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ tatsächlich

$$\begin{aligned}(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha) &= (\cos\alpha, \sin\alpha)^2 = \big(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha, 2\sin\alpha\cos\alpha\big)\\ &= \big(2\cos^2\alpha - 1, 2\sin\alpha\cos\alpha\big) = \big(1 - 2\sin^2\alpha, 2\sin\alpha\cos\alpha\big)\end{aligned}$$

unter Benutzung von $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

2. Für $n = 3$ ergibt sich mit Hilfe der Moivre-Formel und der binomischen Formel

$$\begin{aligned}(\cos 3\alpha, \sin 3\alpha) &= (\cos\alpha, \sin\alpha)^3 = \big((\cos\alpha, 0) + (0, \sin\alpha)\big)^3\\ &= \tbinom{3}{0}(0, \sin\alpha)^3 + \tbinom{3}{1}(\cos\alpha, 0)\cdot(0, \sin\alpha)^2\\ &\quad + \tbinom{3}{2}(\cos\alpha, 0)^2\cdot(0, \sin\alpha) + \tbinom{3}{3}(\cos\alpha, 0)^3\end{aligned}$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Wegen $(\cos\alpha, 0)^2 = \big(\cos^2\alpha, 0\big)$ und $(\cos\alpha, 0)^3 = \big(\cos^3\alpha, 0\big)$ sowie $(0, \sin\alpha)^2 = \big(-\sin^2\alpha, 0\big)$ und $(0, \sin\alpha)^3 = \big(0, -\sin^3\alpha\big)$ folgt daraus

$$\begin{aligned}(\cos 3\alpha, \sin 3\alpha) &= -\big(0, \sin^3\alpha\big) - 3(\cos\alpha, 0)\cdot\big(\sin^2\alpha, 0\big)\\ &\quad + 3\big(\cos^2\alpha, 0\big)\cdot(0, \sin\alpha) + \big(\cos^3\alpha, 0\big)\\ &= -\big(0, \sin^3\alpha\big) - 3\big(\cos\alpha\sin^2\alpha, 0\big) + 3\big(0, \cos^2\alpha\sin\alpha\big) + \big(\cos^3\alpha, 0\big)\\ &= \big((\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha)\cos\alpha, (3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha\big)\\ &= \big(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha, 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha\big)\end{aligned}$$

unter Benutzung von $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. $\square$

Aufgabe 6. Man berechne jeweils alle Lösungen $u \in \mathbb{C}$ der Gleichung

1. $u^2 - (1,3) \cdot u = (4,-3)$,
2. $(u + (3,1))^4 = (16,0)$!

Lösung. 1.1. Durch quadratische Ergänzung der linken Seite ergibt sich für die neue Unbekannte $z = u - \frac{1}{2}(1,3) \in \mathbb{C}$ die Gleichung

$$z^2 = \big(u - \tfrac{1}{2}(1,3)\big)^2 = (4,-3) + \tfrac{1}{4}(1,3)^2 = (4,-3) + \big(-2, \tfrac{3}{2}\big) = \big(2, -\tfrac{3}{2}\big)\,.$$

1.2. Stellt man die rechte Seite $w = (r\cos\alpha, r\sin\alpha) = \big(2, -\frac{3}{2}\big)$ in Polarkoordinaten $r = |w| = \frac{5}{2}$ und $\alpha \in [\pi, 2\pi]$ dar, dann sind

$$z_0 = \sqrt{r}\,\big(\cos\tfrac{\alpha}{2}, \sin\tfrac{\alpha}{2}\big) \in \mathbb{C} \text{ und } z_1 = \sqrt{r}\,\big(\cos(\pi + \tfrac{\alpha}{2}), \sin(\pi + \tfrac{\alpha}{2})\big) = -z_0 \in \mathbb{C}$$

die beiden Lösungen der Gleichung $z^2 = w$. Der Punkt $\big(\cos\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\alpha}{2}\big)$ kann wegen der Lage des Winkels $\frac{\alpha}{2} \in \big[\frac{\pi}{2}, \pi\big]$ eindeutig aus $(\cos\alpha, \sin\alpha) = \big(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\big)$ mit Hilfe der beiden Beziehungen $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ und $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ bestimmt werden:

Aus $2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha = \frac{9}{5}$ folgt sofort $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{9}{10}$ und somit $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ wegen $\frac{\alpha}{2} \in \big[\frac{\pi}{2}, \pi\big]$. Somit ergibt sich aus $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha = -\frac{3}{5}$ schließlich $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}}$, das heißt, die Gleichung $z^2 = w$ hat die beiden Lösungen

$$z_0 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{10}}\,(-3,1) = \tfrac{1}{2}(-3,1) \in \mathbb{C} \text{ und } z_1 = -z_0 = \tfrac{1}{2}(3,-1) \in \mathbb{C}.$$

1.3. Somit besitzt die Gleichung $u^2 - (1,3) \cdot u = (4,-3)$ die Lösungen

$$u_0 = \tfrac{1}{2}(1,3) + z_0 = \tfrac{1}{2}(1,3) + \tfrac{1}{2}(-3,1) = (-1,2) \in \mathbb{C},$$
$$u_1 = \tfrac{1}{2}(1,3) + z_1 = \tfrac{1}{2}(1,3) + \tfrac{1}{2}(3,-1) = (2,1) \in \mathbb{C}.$$

2. Die neue Variable $v = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}(3,1) \in \mathbb{C}$ erfüllt die Gleichung $v^4 = \mathbb{1}$, welche die vierten Einheitswurzeln $v_k = \big(\cos\frac{\pi k}{2}, \sin\frac{\pi k}{2}\big) \in \mathbb{C}$ für $k \in \{0,1,2,3\}$ als Lösungen besitzt. Wegen

$$v_0 = (1,0), \quad v_1 = (0,1), \quad v_2 = (-1,0), \quad v_3 = (0,-1)$$

ergeben sich daraus die Lösungen

$$u_0 = 2v_0 - (3,1) = (2,0) - (3,1) = (-1,-1) \in \mathbb{C},$$
$$u_1 = 2v_1 - (3,1) = (0,2) - (3,1) = (-3,1) \in \mathbb{C},$$
$$u_2 = 2v_2 - (3,1) = (-2,0) - (3,1) = (-5,-1) \in \mathbb{C},$$
$$u_3 = 2v_3 - (3,1) = (0,-2) - (3,1) = (-3,-3) \in \mathbb{C},$$

der Gleichung $(u + (3,1))^4 = (16,0)$. $\square$

Aufgabe 7. Man bestimme jeweils alle Lösungen $u \in \mathbb{C}$ der Gleichung

1. $u^2 - (2,3) \cdot u = (0,-6)$,
2. $(u - (1,1))^3 = (0,27)$!

Lösung. 1.1. Durch quadratische Ergänzung der linken Seite ergibt sich für die neue Unbekannte $z = u - \frac{1}{2}(2,3) \in \mathbb{C}$ die Gleichung

$$z^2 = \left(u - \tfrac{1}{2}(2,3)\right)^2 = (0,-6) + \tfrac{1}{4}(2,3)^2 = (0,-6) + \left(-\tfrac{5}{4}, 3\right) = \left(-\tfrac{5}{4}, -3\right).$$

1.2. Stellt man die rechte Seite $w = (r\cos\alpha, r\sin\alpha) = \left(-\frac{5}{4}, -3\right)$ in Polarkoordinaten $r = |w| = \frac{13}{4}$ und $\alpha \in [\pi, 2\pi]$ dar, dann sind

$$z_0 = \sqrt{r}\left(\cos\tfrac{\alpha}{2}, \sin\tfrac{\alpha}{2}\right) \in \mathbb{C} \text{ und } z_1 = \sqrt{r}\left(\cos(\pi + \tfrac{\alpha}{2}), \sin(\pi + \tfrac{\alpha}{2})\right) = -z_0 \in \mathbb{C}$$

die beiden Lösungen der Gleichung $z^2 = w$. Der Punkt $\left(\cos\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\alpha}{2}\right)$ kann wegen der Lage des Winkels $\frac{\alpha}{2} \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ eindeutig aus $(\cos\alpha, \sin\alpha) = \left(-\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$ mit Hilfe der Beziehungen $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$ und $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ bestimmt werden:

Aus $2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha = \frac{8}{13}$ folgt sofort $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{13}$ und somit $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{2}{\sqrt{13}}$ wegen $\frac{\alpha}{2} \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Somit ergibt sich aus $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha = -\frac{12}{13}$ schließlich auch noch $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{\sqrt{13}}$, das heißt, die Gleichung $z^2 = w$ hat die beiden Lösungen

$$z_0 = \frac{\sqrt{13}}{2}\frac{1}{\sqrt{13}}(-2,3) = \tfrac{1}{2}(-2,3) \in \mathbb{C} \text{ und } z_1 = -z_0 = \tfrac{1}{2}(2,-3) \in \mathbb{C}.$$

1.3. Somit besitzt die Gleichung $u^2 - (2,3) \cdot u = (0,-6)$ die Lösungen

$$u_0 = \tfrac{1}{2}(2,3) + z_0 = \tfrac{1}{2}(2,3) + \tfrac{1}{2}(-2,3) = (0,3) \in \mathbb{C},$$
$$u_1 = \tfrac{1}{2}(2,3) + z_1 = \tfrac{1}{2}(2,3) + \tfrac{1}{2}(2,-3) = (2,0) \in \mathbb{C}.$$

2. Für die neue Variable $z = \frac{1}{3}u - \frac{1}{3}(1,1) \in \mathbb{C}$ ergibt sich offensichtlich die Gleichung $z^3 = (0,1) = \left(\cos\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2}\right)$, die die Lösungen

$$z_k = \left(\cos\left(\tfrac{\pi}{6} + \tfrac{2\pi k}{3}\right), \sin\left(\tfrac{\pi}{6} + \tfrac{2\pi k}{3}\right)\right) \in \mathbb{C} \quad \text{für } k \in \{0,1,2\}$$

besitzt. Wegen $z_0 = \left(\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$, $z_1 = \left(\cos\frac{5\pi}{6}, \sin\frac{5\pi}{6}\right) = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$ und $z_2 = \left(\cos\frac{3\pi}{2}, \sin\frac{3\pi}{2}\right) = (0,-1)$ ergeben sich daraus die Lösungen

$$u_0 = 3z_0 + (1,1) = \left(\tfrac{3}{2}\sqrt{3}, \tfrac{3}{2}\right) + (1,1) = \left(1 + \tfrac{3}{2}\sqrt{3}, \tfrac{5}{2}\right) \in \mathbb{C},$$
$$u_1 = 3z_1 + (1,1) = \left(-\tfrac{3}{2}\sqrt{3}, \tfrac{3}{2}\right) + (1,1) = \left(1 - \tfrac{3}{2}\sqrt{3}, \tfrac{5}{2}\right) \in \mathbb{C},$$
$$u_2 = 3z_2 + (1,1) = (0,-3) + (1,1) = (1,-2) \in \mathbb{C}$$

der Gleichung $(u - (1,1))^3 = (0,27)$. $\square$

Aufgabe 8. Sei $\mathbb{K}_5 = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ die Menge der *fünften Einheitswurzeln*

$$v_k = \left(\cos \tfrac{2\pi k}{5}, \sin \tfrac{2\pi k}{5}\right) \in \mathbb{C} \quad \text{für } k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Werden *Addition* und *Multiplikation* dadurch eingeführt, indem man für alle $k, \ell \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ jeweils *Summe* $v_k \oplus v_\ell = v_1^{k+\ell} \in \mathbb{C}$ und *Produkt* $v_k \odot v_\ell = v_1^{k\ell} \in \mathbb{C}$ definiert, so zeige man, daß $\mathbb{K}_5$ mit diesen Abbildungen einen Körper bildet!

Lösung. Aufgrund der Tatsache, daß die beiden Winkelfunktionen die Periode 2π haben, gilt $\left(\cos \frac{2\pi n}{5}, \sin \frac{2\pi n}{5}\right) \in \mathbb{K}_5$ für alle ganzen Zahlen $n \in \mathbb{Z}$. Somit führt die angegebene Addition bzw. Multiplikation nicht aus der Menge $\mathbb{K}_5$ heraus, denn für alle Indizes $k, \ell \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ gilt wegen der Moivre-Formel

$$\begin{aligned} v_k \oplus v_\ell &= v_1^{k+\ell} = \left(\cos \tfrac{2\pi(k+\ell)}{5}, \sin \tfrac{2\pi(k+\ell)}{5}\right) \in \mathbb{K}_5, \\ v_k \odot v_\ell &= v_1^{k\ell} = \left(\cos \tfrac{2\pi k\ell}{5}, \sin \tfrac{2\pi k\ell}{5}\right) \in \mathbb{K}_5. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Darstellung kann man leicht alle Summen und Produkte von Elementen aus $\mathbb{K}_5$ berechnen und jeweils in den Tafeln

$\oplus$	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
v_0	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	v_1	v_2	v_3	v_4	v_0
v_2	v_2	v_3	v_4	v_0	v_1
v_3	v_3	v_4	v_0	v_1	v_2
v_4	v_4	v_0	v_1	v_2	v_3

$\odot$	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
v_0	v_0	v_0	v_0	v_0	v_0
v_1	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
v_2	v_0	v_2	v_4	v_1	v_3
v_3	v_0	v_3	v_1	v_4	v_2
v_4	v_0	v_4	v_3	v_2	v_1

zusammenfassen sowie die Gültigkeit der Körperaxiome überprüfen:

1. Es gilt $v_k \oplus (v_\ell \oplus v_m) = v_1^{k+(\ell+m)} = v_1^{(k+\ell)+m} = (v_k \oplus v_\ell) \oplus v_m$ für alle Elemente $v_k, v_\ell, v_m \in \mathbb{K}_5$.

2. Für alle $v_k, v_\ell \in \mathbb{K}_5$ gilt $v_k \oplus v_\ell = v_1^{k+\ell} = v_1^{\ell+k} = v_\ell \oplus v_k$.

3. Für $v_0 \in \mathbb{K}_5$ gilt $v_0 \oplus v_k = v_1^{0+k} = v_1^k = v_k$ für jedes $v_k \in \mathbb{K}_5$.

4. Aus der Tafel für die Addition entnimmt man zeilenweise, daß zu jedem $v_k \in \mathbb{K}_5$ ein $v_\ell \in \mathbb{K}_5$ existiert, so daß $v_k \oplus v_\ell = v_0$ gilt.

5. Für alle $v_k, v_\ell, v_m \in \mathbb{K}_5$ gilt $v_k \odot (v_\ell \odot v_m) = v_1^{k(\ell m)} = v_1^{(k\ell)m} = (v_k \odot v_\ell) \odot v_m$.

6. Für alle $v_k, v_\ell \in \mathbb{K}_5$ gilt $v_k \odot v_\ell = v_1^{k\ell} = v_1^{\ell k} = v_\ell \odot v_k$.

7. Für $v_1 \neq v_0$ gilt $v_1 \odot v_k = v_1^{1\cdot k} = v_1^k = v_k$ für jedes $v_k \in \mathbb{K}_5$.

8. Aus der Tafel für die Multiplikation entnimmt man zeilenweise, daß es für jedes $v_k \in \mathbb{K}_5$ mit $k \neq 0$ ein $v_\ell \in \mathbb{K}_5$ gibt, so daß $v_k \odot v_\ell = v_1$ gilt.

9. Es gilt $v_k \odot (v_\ell \oplus v_m) = v_1^{k(\ell+m)} = v_1^{k\ell+km} = (v_k \odot v_\ell) \oplus (v_k \odot v_m)$ für alle Elemente $v_k, v_\ell, v_m \in \mathbb{K}_5$. □

Aufgabe 9. Man zeige, daß sich jeder rationale Punkt $v = (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ der Einheitskreislinie $\{v \in \mathbb{C} \mid |v|^2 = 1\}$ in der Form

$$v = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}, \frac{2ab}{a^2 + b^2}\right) \quad \text{oder} \quad v = \left(\frac{2ab}{a^2 + b^2}, \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)$$

darstellen läßt, wobei $a, b \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen mit $(a, b) \neq \mathbb{0}$ sind!

Lösung. 1. Sei $v = (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ mit $|v|^2 = x^2 + y^2 = 1$ vorgegeben. Im Falle $v = -\mathbb{1}$ liefern $a = 0$ und $b = 1$ die gewünschte Darstellung. Anderenfalls gilt stets $v + \mathbb{1} \neq \mathbb{0}$ und somit auch $\overline{v} + \mathbb{1} \neq \mathbb{0}$. Aufgrund der Beziehung $v\overline{v} = (|v|^2, 0) = \mathbb{1}$ ergibt sich $v + \mathbb{1} = v + v\overline{v} = v(\overline{v} + \mathbb{1})$ und somit $v = (v + \mathbb{1})(\overline{v} + \mathbb{1})^{-1}$.

Wegen $v + \mathbb{1} = (x + 1, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ und $v + \mathbb{1} \neq \mathbb{0}$ kann man ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ und $d \in \mathbb{N}$ mit $(a, b) \neq \mathbb{0}$ derart finden, daß sich die Brüche $x + 1 = \frac{a}{d} \in \mathbb{Q}$ und $y = \frac{b}{d} \in \mathbb{Q}$ auf denselben Nenner bringen lassen. Daraus ergibt sich $v + \mathbb{1} = \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)$, also auch $\overline{v} + \mathbb{1} = \left(\frac{a}{d}, -\frac{b}{d}\right)$ und somit

$$v = \frac{v + \mathbb{1}}{\overline{v} + \mathbb{1}} = \frac{(a, b)}{(a, -b)} = (a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{b}{a^2 + b^2}\right) = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}, \frac{2ab}{a^2 + b^2}\right).$$

Sind also $x, y \in \mathbb{Q}$ rationale Zahlen mit $x^2 + y^2 = 1$, dann gibt es zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $(a, b) \neq \mathbb{0}$ und der Darstellung

$$(x, y) = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}, \frac{2ab}{a^2 + b^2}\right) \quad \text{oder auch} \quad (x, y) = \left(\frac{2ab}{a^2 + b^2}, \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right).$$

2. Umgekehrt gilt für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $(a, b) \neq \mathbb{0}$ stets

$$\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{2ab}{a^2 + b^2}\right)^2 = \frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2} = 1,$$

das heißt, die komplexen Zahlen

$$v = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}, \frac{2ab}{a^2 + b^2}\right) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \quad \text{oder} \quad v = \left(\frac{2ab}{a^2 + b^2}, \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

erfüllen stets die Bedingung $|v|^2 = 1$. □

Aufgabe 10. Man untersuche, ob es eine Kreislinie $\{v \in \mathbb{C} \mid |v - v_0|^2 = r^2\}$ um einen Mittelpunkt $v_0 \in \mathbb{C}$ mit einem Radius $r > 0$ oder eine Gerade $\{w_0 + \lambda w \in \mathbb{C} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ durch einen Aufpunkt $w_0 \in \mathbb{C}$ mit einer Richtung $w \in \mathbb{C}$ gibt, welche jeweils durch die drei verschiedenen Punkte

1. $v_1 = (3, -3) \in \mathbb{C}$, $v_2 = (10, 4) \in \mathbb{C}$ sowie $v_3 = (6, 6) \in \mathbb{C}$ bzw.
2. $v_1 = (1, -1) \in \mathbb{C}$, $v_2 = (5, 7) \in \mathbb{C}$ sowie $v_3 = (2, 1) \in \mathbb{C}$

hindurchgeht und bestimme gegebenfalls $v_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ bzw. $w_0 \in \mathbb{C}$ und $w \in \mathbb{C}$!

Lösung. 1. Man versucht zunächst, die kartesischen Koordinaten a_0, $b_0 \in \mathbb{R}$ eines Mittelpunktes $v_0 = (a_0, b_0) \in \mathbb{C}$ und einen Radius $r > 0$ aus den drei Gleichungen

$$\begin{aligned}(a_1 - a_0)^2 + (b_1 - b_0)^2 &= r^2\\ (a_2 - a_0)^2 + (b_2 - b_0)^2 &= r^2\\ (a_3 - a_0)^2 + (b_3 - b_0)^2 &= r^2\end{aligned}$$

zu bestimmen, die aus der Kreisgleichung $|v - v_0|^2 = r^2$ durch Einsetzen der Koordinaten a_k, $b_k \in \mathbb{R}$ der vorgegebenen Punkte $v_k = (a_k, b_k) \in \mathbb{C}$ für $k \in \{1, 2, 3\}$ entstehen:

1.1. Für die Punkte $(a_1, b_1) = (3, -3)$, $(a_2, b_2) = (10, 4)$ und $(a_3, b_3) = (6, 6)$ ergibt sich nach Ausmultiplikation und Zusammenfassung das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}-6a_0 + 6b_0 &= r^2 - a_0^2 - b_0^2 - 18\\ -20a_0 - 8b_0 &= r^2 - a_0^2 - b_0^2 - 116\\ -12a_0 - 12b_0 &= r^2 - a_0^2 - b_0^2 - 72.\end{aligned}$$

Man subtrahiert die erste Zeile von der zweiten und der dritten Zeile und erhält

$$\begin{aligned}-6a_0 + 6b_0 &= r^2 - a_0^2 - b_0^2 - 18\\ -14a_0 - 14b_0 &= -98\\ -6a_0 - 18b_0 &= -54.\end{aligned}$$

Das Teilsystem aus zweiter und dritter Gleichung hat $v_0 = (a_0, b_0) = (6, 1)$ als Lösung, welche somit den Mittelpunkt des gesuchten Kreises darstellt. Sein Radius $r = 5$ ergibt sich aus der Kreisgleichung $|v_3 - v_0|^2 = r^2$, wenn man den Punkt $v_3 = (a_3, b_3) = (6, 6)$ einsetzt.

1.2. Sei $\{v_3 + \lambda(v_2 - v_3) \in \mathbb{C} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ die Gerade, welche durch die Punkte $v_3 = (6, 6)$ und $v_2 = (10, 4)$ läuft. Da es *kein* $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$v_1 = (3, -3) = (6, 6) + \lambda(4, -2) = v_3 + \lambda(v_2 - v_3)$$

gibt, liegt der Punkt v_1 *nicht* auf dieser Geraden.

2.1. Für die Punkte $(a_1, b_1) = (1, -1)$, $(a_2, b_2) = (5, 7)$ und $(a_3, b_3) = (2, 1)$ erhält man nach Ausmultiplikation und Zusammenfassung das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -2a_0 + 2b_0 &= r^2 - a_0^2 - b_0^2 - 2 \\ -10a_0 - 14b_0 &= r^2 - a_0^2 - b_0^2 - 74 \\ -4a_0 - 2b_0 &= r^2 - a_0^2 - b_0^2 - 5. \end{aligned}$$

Man subtrahiert die erste Zeile von der zweiten und der dritten Zeile und erhält

$$\begin{aligned} -2a_0 + 2b_0 &= r^2 - a_0^2 - b_0^2 - 2 \\ -8a_0 - 16b_0 &= -72 \\ -2a_0 - 4b_0 &= -3. \end{aligned}$$

Das Teilsystem aus der zweiten und dritten Gleichung hat *keine* Lösung $(a_0, b_0) \in \mathbb{C}$. Es gibt somit *keine* Kreislinie, die durch die drei Punkte v_1, v_2 und v_3 hindurchgeht.

2.2. Sei $\{v_3 + \lambda(v_2 - v_3) \in \mathbb{C} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ die Gerade, welche durch die Punkte $v_3 = (2, 1)$ und $v_2 = (5, 7)$ verläuft. Da für $\lambda = -\frac{1}{3}$ die Beziehung

$$v_1 = (1, -1) = (2, 1) + \lambda(3, 6) = v_3 + \lambda(v_2 - v_3)$$

gilt, liegt auch der Punkt $v_1 = (1, -1)$ auf dieser Geraden. $\square$