Übungsaufgaben 5

Stetige Funktionen

Aufgabe 1. Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \sqrt[3]{\sqrt{1+x^2}+x} - \sqrt[3]{\sqrt{1+x^2}-x} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ gegeben.}$$

Man zeige, daß die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv ist, berechne (mit Hilfe binomischer Formeln) ihre inverse Funktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und begründe, warum die Funktionen $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton sind! ⑧

Lösung. 1. Man sucht eine bijektive Abbildung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche die Gleichung $g(f(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt:

1.1. Wird $x \in \mathbb{R}$ beliebig vorgegeben, dann erhält man für

$$\xi = f(x) = a - b \quad \text{mit} \quad a = \sqrt[3]{\sqrt{1+x^2}+x} \quad \text{und} \quad b = \sqrt[3]{\sqrt{1+x^2}-x}$$

aufgrund der binomischen Formel die Beziehung

$$\xi^3 = (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3(a-b)ab.$$

Wegen $a - b = \xi$ und

$$ab = \sqrt[3]{\sqrt{1+x^2}+x}\,\sqrt[3]{\sqrt{1+x^2}-x} = \sqrt[3]{(1+x^2)-x^2} = 1$$

folgt daraus

$$\xi^3 = \big(\sqrt{1+x^2}+x\big) - \big(\sqrt{1+x^2}-x\big) - 3\xi = 2x - 3\xi.$$

Definiert man die ganze rationale Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$g(\xi) = \frac{\xi^3 + 3\xi}{2} \quad \text{für } \xi \in \mathbb{R},$$

dann gilt somit $g(f(x)) = x$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

1.2. Da sowohl $\lim_{\xi\to\infty} g(\xi) = \infty$ als auch $\lim_{\xi\to-\infty} g(\xi) = -\infty$ gelten, ist die stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nach dem Zwischenwertsatz surjektiv. Besitzen $\xi, y \in \mathbb{R}$ die Eigenschaft $g(\xi) = g(y)$, dann folgt daraus aufgrund binomischer Formeln

$$\begin{aligned} 0 = g(\xi) - g(y) &= \frac{(\xi^3 - y^3) + 3(\xi - y)}{2} = \frac{\big((\xi^2 + \xi y + y^2) + 3\big)(\xi - y)}{2} \\ &= \frac{\big((\xi + y)^2 + \xi^2 + y^2 + 6\big)(\xi - y)}{4} \end{aligned}$$

und damit $\xi = y$ wegen $(\xi + y)^2 + \xi^2 + y^2 + 6 > 0$. Somit ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektiv, also bijektiv, das heißt, nach Schritt 1.1 die inverse Funktion zu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

2. Da $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv ist, muß g streng monoton sein. Damit ist auch die inverse Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, injektiv und somit streng monoton. □

Aufgabe 2. Seien $X = [1, \infty[$ und die beiden Funktionen $f, g : X \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} \quad \text{bzw.} \quad g(x) = \left(2\sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right) x\sqrt{x}$$

für $x \in X$ definiert. Man zeige, daß die Grenzwerte $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to\infty} g(x)$ existieren und berechne diese Werte! ⑥

Lösung. 1. Für die Berechnung des Grenzwerts $\lim_{x\to\infty} f(x)$ erweitert man Zähler und Nenner von f und erhält

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x-\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x-\sqrt{x}}} \\ &= \frac{(x+\sqrt{x}) - (x-\sqrt{x})}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x-\sqrt{x}}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} + \sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}} \end{aligned}$$

für jedes $x \in X$. Wegen $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ liefert die Stetigkeit der Wurzelfunktion

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} + \sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}} = 1$$

als gesuchten Grenzwert.

2. Zur Berechnung des Grenzwerts $\lim_{\xi\to\infty} g(\xi)$ werden ebenfalls in geeigneter Weise Zähler und Nenner von g erweitert: Für alle $\xi \in X$ ergibt sich zunächst

$$g(\xi) = \left(\sqrt{\xi} - \sqrt{\xi-1}\right)\xi\sqrt{\xi} - \left(\sqrt{\xi+1} - \sqrt{\xi}\right)\xi\sqrt{\xi}$$

und somit

$$\begin{aligned} g(\xi) &= \frac{\left(\sqrt{\xi} - \sqrt{\xi-1}\right)\left(\sqrt{\xi} + \sqrt{\xi-1}\right)\xi\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi} + \sqrt{\xi-1}} - \frac{\left(\sqrt{\xi+1} - \sqrt{\xi}\right)\left(\sqrt{\xi+1} + \sqrt{\xi}\right)\xi\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi+1} + \sqrt{\xi}} \\ &= \frac{\xi\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi} + \sqrt{\xi-1}} - \frac{\xi\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi+1} + \sqrt{\xi}} = \frac{\left(\sqrt{\xi+1} - \sqrt{\xi-1}\right)\xi\sqrt{\xi}}{\left(\sqrt{\xi} + \sqrt{\xi-1}\right)\left(\sqrt{\xi+1} + \sqrt{\xi}\right)} \end{aligned}$$

sowie durch erneute Erweiterung von Zähler und Nenner

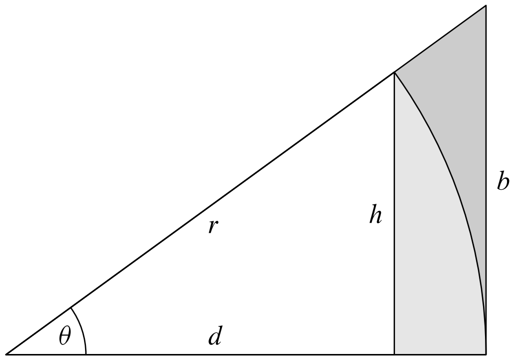
$$\begin{aligned} g(\xi) &= \frac{\left(\sqrt{\xi+1} - \sqrt{\xi-1}\right)\left(\sqrt{\xi+1} + \sqrt{\xi-1}\right)\xi\sqrt{\xi}}{\left(\sqrt{\xi} + \sqrt{\xi-1}\right)\left(\sqrt{\xi+1} + \sqrt{\xi}\right)\left(\sqrt{\xi+1} + \sqrt{\xi-1}\right)} \\ &= \frac{2\xi\sqrt{\xi}}{\left(\sqrt{\xi} + \sqrt{\xi-1}\right)\left(\sqrt{\xi+1} + \sqrt{\xi}\right)\left(\sqrt{\xi+1} + \sqrt{\xi-1}\right)} . \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{\xi\to\infty} \frac{1}{\xi} = 0$ liefert die Stetigkeit der Wurzelfunktion

$$\lim_{\xi\to\infty} g(\xi) = \lim_{\xi\to\infty} \frac{2}{\left(1 + \sqrt{1-\frac{1}{\xi}}\right)\left(1 + \sqrt{1+\frac{1}{\xi}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{\xi}} + \sqrt{1-\frac{1}{\xi}}\right)} = \frac{1}{4}$$

als gesuchten Grenzwert. □

Aufgabe 3. Seien gemäß Abbildung ein Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $r > 0$ sowie ein Sektor gegeben, der von den beiden vom Nullpunkt ausgehenden Schenkeln des Winkels $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ und der Kreislinie eingeschlossen wird.



1. Die zum unteren Schenkel senkrechte Strecke h durch den Schnittpunkt der Kreislinie mit dem oberen Schenkel schneidet vom Kreissektor ein rechtwinkliges Dreieck ab. Man berechne den Flächeninhalt $F_1(\theta)$ der hellgrauen Restfläche!

2. Von den beiden Schenkeln des Winkels θ und der Parallelen b zur Strecke h durch den Schnittpunkt der Kreislinie mit dem unteren Schenkel wird ein rechtwinkliges Dreieck eingeschlossen. Die Kreislinie schneidet von diesem Dreieck den Kreissektor ab. Man bestimme den Flächeninhalt $F_2(\theta)$ der dunkelgrauen Restfläche!

3. Man weise (mit Hilfe bekannter Grenzwerte für trigonometrische Funktionen) nach, daß sich im Grenzfall $\theta \downarrow 0$ die Beziehung

$$\lim_{\theta \downarrow 0} \frac{F_1(\theta)}{F_2(\theta)} = 2$$

für das Verhältnis beider Flächeninhalte ergibt! ⑥

Lösung. 1. Das weiße rechtwinklige Dreieck mit der Grundseite $d = r\cos\theta$ und der Höhe $h = r\sin\theta$ besitzt den Flächeninhalt $F_\delta(\theta) = \frac{1}{2}dh = \frac{1}{2}r^2\sin\theta\cos\theta$. Da der Kreissektor mit dem Radius $r > 0$ und dem Öffnungswinkel θ den Flächeninhalt $F_0(\theta) = \frac{\theta}{2\pi}\cdot\pi r^2 = \frac{\theta}{2}r^2$ hat, ergibt sich für den Flächeninhalt der hellgrauen Restfläche demzufolge $F_1(\theta) = F_0(\theta) - F_\delta(\theta) = \frac{1}{2}r^2(\theta - \sin\theta\cos\theta)$.

2. Das große rechtwinklige Dreieck mit den Katheten r und $b = \frac{rh}{d} = r\tan\theta$ besitzt den Flächeninhalt $F_\Delta(\theta) = \frac{1}{2}rb = \frac{1}{2}r^2\tan\theta$. Da der Kreissektor mit dem Radius $r > 0$ und dem Öffnungswinkel θ den Flächeninhalt $F_0(\theta) = \frac{\theta}{2\pi}\cdot\pi r^2 = \frac{\theta}{2}r^2$ hat, erhält man $F_2(\theta) = F_\Delta(\theta) - F_0(\theta) = \frac{1}{2}r^2(\tan\theta - \theta)$ als Flächeninhalt der dunkelgrauen Restfläche.

3. Für die oben berechneten Flächeninhalte ergibt sich das Verhältnis

$$\begin{aligned}\frac{F_1(\theta)}{F_2(\theta)} &= \frac{\theta - \sin\theta\cos\theta}{\tan\theta - \theta} = \frac{(\theta - \sin\theta\cos\theta)\cos\theta}{\sin\theta - \theta\cos\theta} \\ &= \frac{(\theta\cos\theta - \sin\theta) + (1 - \cos^2\theta)\sin\theta}{\sin\theta - \theta\cos\theta} = \frac{\sin^3\theta}{\sin\theta - \theta\cos\theta} - 1\end{aligned}$$

für jedes $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Da der Kehrwert des ersten Summanden die Darstellung

$$\frac{\sin\theta - \theta\cos\theta}{\sin^3\theta} = \left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^3\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2} - \frac{\theta - \sin\theta}{\theta^3}\right)$$

für jedes $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ besitzt, liefern die bekannten Grenzwertbeziehungen

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1, \quad \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{\theta\to 0}\frac{\theta - \sin\theta}{\theta^3} = \frac{1}{6}$$

für die trigonometrischen Funktionen demzufolge

$$\lim_{\theta\downarrow 0}\frac{\sin\theta - \theta\cos\theta}{\sin^3\theta} = \lim_{\theta\downarrow 0}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^3\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2} - \frac{\theta - \sin\theta}{\theta^3}\right) = \frac{1}{3},$$

woraus sich schließlich

$$\lim_{\theta\downarrow 0}\frac{F_1(\theta)}{F_2(\theta)} = \lim_{\theta\downarrow 0}\frac{\sin^3\theta}{\sin\theta - \theta\cos\theta} - 1 = 3 - 1 = 2$$

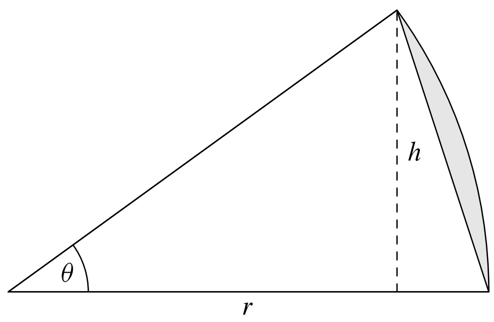
als gesuchter Grenzwert ergibt. $\square$

Aufgabe 4. Man zeige (mit Hilfe der Additionstheoreme), daß die Abschätzungen

$$|\sin x - \sin y| \le |x - y| \quad \text{und} \quad |\cos x - \cos y| \le |x - y| \quad \text{für alle } x,\, y \in [-\pi, \pi]$$

gelten und schließe daraus, daß Sinus und Cosinus auf $[-\pi, \pi]$ stetig sind!

Lösung. 1. Man betrachtet einen Kreissektor mit dem Radius $r > 0$ und dem Öffnungswinkel $\theta \in\,]0, \pi[$ und studiert die Inhalte folgender Flächenstücke:



Offenbar hat das weiße Dreieck mit der Grundseite r und der Höhe $h = r \sin\theta$ den Flächeninhalt $F_1 = \frac{1}{2} r h = \frac{1}{2} r^2 \sin\theta$. Fügt man das hellgraue Kreissegment mit hinzu, erhält man den Kreissektor mit dem Radius r und dem Öffnungswinkel $\theta \in\,]0, \pi[$, welcher einen Flächeninhalt $F_2 = \frac{\theta}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \frac{\theta}{2} r^2$ besitzt. Da stets $F_1 < F_2$ gilt, ergibt sich daraus $0 \le \sin\theta \le \theta$ für alle $\theta \in [0, \pi]$. Wegen $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ erhält man demnach $|\sin\theta| \le |\theta|$ für alle $\theta \in [-\pi, \pi]$.

2. Für alle $\alpha, \beta \in [-\pi, \pi]$ gelten die Additionstheoreme

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta,$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta.$$

Setzt man $\alpha = \frac{x+y}{2} \in [-\pi, \pi]$ und $\beta = \frac{x-y}{2} \in [-\pi, \pi]$ für $x,\, y \in [-\pi, \pi]$ ein, so erhält man die Formeln

$$\sin x - \sin y = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos\alpha \sin\beta = 2 \cos\frac{x+y}{2} \sin\frac{x-y}{2},$$
$$\cos x - \cos y = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin\alpha \sin\beta = -2 \sin\frac{x+y}{2} \sin\frac{x-y}{2}.$$

Da $\left|\cos\frac{x+y}{2}\right| \le 1$ und $\left|\sin\frac{x+y}{2}\right| \le 1$ sowie $\frac{x-y}{2} \in [-\pi, \pi]$ für alle $x,\, y \in [-\pi, \pi]$ gilt, ergeben sich daraus wegen Schritt 1 die gewünschten Abschätzungen

$$|\sin x - \sin y| \le 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right| \le |x - y| \quad \text{und} \quad |\cos x - \cos y| \le 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right| \le |x - y|$$

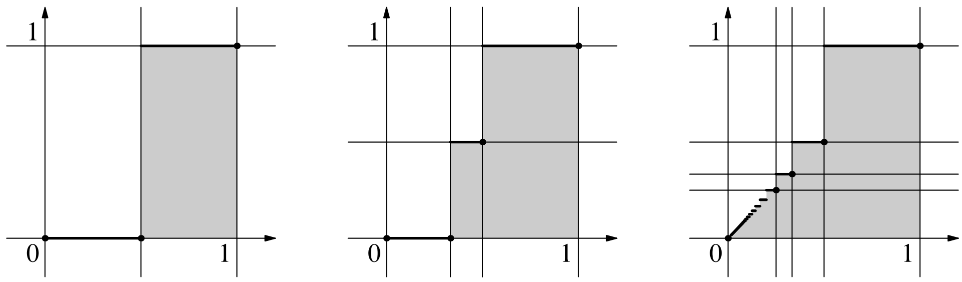
für alle $x,\, y \in [-\pi, \pi]$.

3. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Aufgrund von Schritt 2 gilt für alle $x,\, y \in [-\pi, \pi]$ mit $|x - y| \le \varepsilon$ sowohl $|\sin x - \sin y| \le \varepsilon$ als auch $|\cos x - \cos y| \le \varepsilon$, woraus die (gleichmäßige) Stetigkeit von Sinus und Cosinus auf $[-\pi, \pi]$ folgt. $\square$

Aufgabe 5. Sei eine Folge (f_k) von Treppenfunktionen $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le x \le \frac{1}{k+1}, \\ \frac{1}{k} & \text{für } \frac{1}{k+1} < x \le \frac{1}{k}, \end{cases}$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$ und eine Funktionenreihe (s_n) durch die entsprechenden Teilsummen $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert. Man zeige, daß die Funktionenreihe (s_n) gleichmäßig gegen eine regulierte Funktion $s : [0,1] \to \mathbb{R}$ konvergiert!



Lösung. 1. Die Teilsummen $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ sind ebenfalls Treppenfunktionen für alle $n \in \mathbb{N}$, denn es gilt

$$s_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le x \le \frac{1}{n+1}, \\ \frac{1}{k} & \text{für } \frac{1}{k+1} < x \le \frac{1}{k} \text{ und } k \in \{1, \dots, n\}. \end{cases}$$

Definiert man die Funktion $s : [-1,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$s(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ \frac{1}{k} & \text{für } \frac{1}{k+1} < x \le \frac{1}{k} \text{ und } k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

dann erhält man für jedes $n \in \mathbb{N}$ als Differenz

$$s(x) - s_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ \frac{1}{k} & \text{für } \frac{1}{k+1} < x \le \frac{1}{k} \text{ und } k \in \mathbb{N}, k \ge n+1, \\ 0 & \text{für } \frac{1}{k+1} < x \le \frac{1}{k} \text{ und } k \in \{1, \dots, n\}. \end{cases}$$

Daraus ergibt sich

$$|s(x) - s_n(x)| \le \frac{1}{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } x \in [0,1],$$

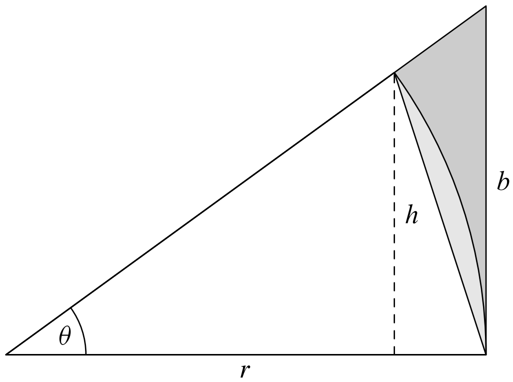
woraus die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenreihe (s_n) gegen die Grenzfunktion $s : [0,1] \to \mathbb{R}$ folgt, die somit reguliert ist, da die Teilsummen $s_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ Treppenfunktionen sind und das Intervall $[0,1]$ abgeschlossen und beschränkt ist. $\square$

Aufgabe 6. Man zeige, daß die Beziehungen $\lim_{\theta\to 0} \sin\theta = 0$, $\lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$ und

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1, \quad \lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{\theta\to 0} \frac{\theta - \sin\theta}{\theta^3} = \frac{1}{6}$$

für die trigonometrischen Funktionen gelten!

Lösung. 1. Man betrachtet einen Kreissektor mit dem Radius $r > 0$ und dem Öffnungswinkel $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ und studiert die Inhalte folgender Flächenstücke:



Das weiße Dreieck mit der Grundseite r und der Höhe $h = r\sin\theta$ hat den Flächeninhalt $F_1 = \frac{1}{2}rh = \frac{1}{2}r^2\sin\theta$. Fügt man das hellgraue Kreissegment mit hinzu, erhält man den Kreissektor mit dem Radius r und dem Öffnungswinkel $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, welcher einen Flächeninhalt $F_2 = \frac{\theta}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \frac{\theta}{2}r^2$ hat. Nimmt man schließlich noch das dunkelgraue Flächenstück hinzu, bekommt man ein rechtwinkliges Dreieck mit den beiden Katheten r und $b = \frac{rh}{r\cos\theta} = r\tan\theta$, welches offenbar einen Flächeninhalt $F_3 = \frac{1}{2}rb = \frac{1}{2}r^2\tan\theta$ besitzt. Da stets $F_1 < F_2 < F_3$ gilt, ergibt sich daraus

$$\sin\theta < \theta < \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \text{und somit} \quad \cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1 \quad \text{für alle } \theta \in \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[.$$

Wegen $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ und $\cos(-\theta) = \cos\theta$ erhält man demnach

$$\sin\theta > \theta > \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \text{und ebenso} \quad \cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1 \quad \text{für alle } \theta \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, 0\right[.$$

2. Daraus folgt $0 \le \lim_{\theta\to 0} |\sin\theta| \le \lim_{\theta\to 0} |\theta| = 0$, also $\lim_{\theta\to 0}\sin\theta = 0$. Wegen des Additionstheorems $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$ ergibt sich deshalb

$$\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = \lim_{\theta\to 0}\left(1 - 2\sin^2\tfrac{\theta}{2}\right) = 1.$$

Außerdem liefert die in Schritt 1 gewonnene Abschätzung auch

$$\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1 \quad \text{für alle } \theta \in \mathbb{R} \text{ mit } 0 < |\theta| < \tfrac{\pi}{2},$$

woraus schließlich

$$1 = \lim_{\theta\to 0}\cos\theta \le \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} \le 1 \quad \text{und somit} \quad \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \quad \text{folgt.}$$

3. Wegen der Beziehungen

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta \quad \text{und} \quad \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

ergibt sich

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} = \lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos 2\theta}{(2\theta)^2} = \lim_{\theta\to 0} \frac{2\sin^2\theta}{4\theta^2} = \frac{1}{2}\left(\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2 = \frac{1}{2}\,.$$

4. Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(\theta) = \frac{\theta - \sin\theta}{\theta^3} \quad \text{für } \theta \in \mathbb{R} \text{ mit } \theta \neq 0$$

definiert. Der Existenznachweis und die Berechnung des Grenzwerts

$$\lim_{\theta\to 0} f(\theta) = \frac{1}{6}$$

erfolgt in mehreren Schritten:

4.1. Die in Schritt 1 für alle $\theta \in \mathbb{R}$ mit $0 < |2\theta| < \frac{\pi}{2}$ gewonnene Abschätzung

$$\cos 2\theta < \frac{\sin 2\theta}{2\theta} < 1 \quad \text{liefert} \quad 0 < \frac{2\theta - \sin 2\theta}{2\theta} < 1 - \cos 2\theta$$

und somit wegen $1 - \cos 2\theta = 2\sin^2\theta$ untere und obere Schranken

$$0 < f(2\theta) = \frac{2\theta - \sin 2\theta}{(2\theta)^3} < \frac{1-\cos 2\theta}{(2\theta)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2 < \frac{1}{2}$$

für jedes $\theta \in \mathbb{R}$ mit $0 < |2\theta| < \frac{\pi}{2}$.

4.2. Aufgrund des Additionstheorems $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ gilt außerdem

$$f(2\theta) = \frac{2\theta - \sin 2\theta}{(2\theta)^3} = \frac{\theta - \sin\theta\cos\theta}{4\theta^3} = \frac{f(\theta)}{4} + \frac{\sin\theta}{4\theta}\cdot\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}$$

für alle $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Aus den in Schritt 2 und 3 gewonnenen Grenzwertbeziehungen

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} = \frac{1}{2} \quad \text{folgt} \quad \lim_{\theta\to 0}\left(f(2\theta) - \frac{f(\theta)}{4}\right) = \frac{1}{8}\,.$$

4.3. Wird $\varepsilon > 0$ beliebig fixiert, dann existiert somit ein $\delta \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, so daß

$$\left| f(\theta) - \frac{f\left(\frac{\theta}{2}\right)}{4} - \frac{1}{8} \right| \leq \frac{3\varepsilon}{4} \quad \text{für alle } \theta \in \mathbb{R} \text{ mit } 0 < |\theta| \leq \delta \text{ gilt.}$$

Sei $\theta \in \mathbb{R}$ mit $0 < |\theta| \leq \delta$ beliebig vorgegeben und die Folge (θ_k) durch $\theta_k = \frac{\theta}{2^k}$ für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definiert. Wegen $0 < |\theta_k| \leq \delta$ ergibt sich

$$\left| f(\theta_k) - \frac{f(\theta_{k+1})}{4} - \frac{1}{8} \right| \leq \frac{3\varepsilon}{4}\,, \quad \text{also} \quad \left| \frac{f(\theta_k)}{4^k} - \frac{f(\theta_{k+1})}{4^{k+1}} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4^k} \right| \leq \frac{3\varepsilon}{4}\cdot\frac{1}{4^k}$$

für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

4.4. Aufgrund der geometrischen Summenformel

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k} = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right) \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

erhält man für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ durch Indexverschiebung

$$\begin{aligned} f(\theta_0) - \frac{f(\theta_{n+1})}{4^{n+1}} - \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f(\theta_k)}{4^k} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f(\theta_k)}{4^k} - \frac{1}{8} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{f(\theta_k)}{4^k} - \frac{f(\theta_{k+1})}{4^{k+1}} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4^k} \right). \end{aligned}$$

Mit Schritt 4.3 folgt daraus

$$\begin{aligned} \left| f(\theta_0) - \frac{f(\theta_{n+1})}{4^{n+1}} - \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right) \right| &\leq \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{f(\theta_k)}{4^k} - \frac{f(\theta_{k+1})}{4^{k+1}} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4^k} \right| \\ &\leq \frac{3\varepsilon}{4} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k} = \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right) \varepsilon \leq \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und somit wegen $\theta_0 = \theta$ und Schritt 4.1 schließlich

$$\left| f(\theta) - \frac{1}{6} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| f(\theta_0) - \frac{f(\theta_{n+1})}{4^{n+1}} - \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right) \right| \leq \varepsilon.$$

Da $\theta \in \mathbb{R}$ mit $0 < |\theta| \leq \delta$ in Schritt 4.3 beliebig vorgegeben wurde, ergibt sich daraus der gesuchte Grenzwert $\lim_{\theta \to 0} f(\theta) = \frac{1}{6}$. $\square$

Aufgabe 7. Seien $X = [0, \infty[$ und die beiden Funktionen $f, g : X \to \mathbb{R}$ durch

$$f(\xi) = \sqrt{\xi + 1} - \sqrt{\xi} \quad \text{bzw.} \quad g(\xi) = \left(\sqrt{\xi + 1} - \sqrt{\xi}\right)\sqrt{\xi}$$

für $\xi \in X$ definiert. Man zeige, daß die Grenzwerte $\lim_{\xi\to\infty} f(\xi)$ und $\lim_{\xi\to\infty} g(\xi)$ existieren und berechne diese Werte!

Lösung. Für die Grenzwertberechnung der erweitert man jeweils Zähler und Nenner um geeignete Faktoren, welche die Anwendung einer binomischen Formel gestatten:

1. Für alle $\xi \in [0, \infty[$ gilt

$$f(\xi) = \frac{\left(\sqrt{\xi + 1} - \sqrt{\xi}\right)\left(\sqrt{\xi + 1} + \sqrt{\xi}\right)}{\sqrt{\xi + 1} + \sqrt{\xi}} = \frac{1}{\sqrt{\xi + 1} + \sqrt{\xi}}$$

und somit

$$\lim_{\xi\to\infty} f(\xi) = \lim_{\xi\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\xi + 1} + \sqrt{\xi}} = 0$$

wegen $\lim_{\xi\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\xi}} = 0$.

2. Genauso wie zuvor erhält man

$$g(\xi) = \frac{\left(\sqrt{\xi + 1} - \sqrt{\xi}\right)\left(\sqrt{\xi + 1} + \sqrt{\xi}\right)\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi + 1} + \sqrt{\xi}} = \frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi + 1} + \sqrt{\xi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\xi}} + 1}$$

für jedes $\xi \in [0, \infty[$. Wegen $\lim_{\xi\to\infty} \frac{1}{\xi} = 0$ und der Stetigkeit der Wurzelfunktion folgt daraus schließlich

$$\lim_{\xi\to\infty} g(\xi) = \lim_{\xi\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\xi}} + 1} = \frac{1}{2}$$

als gesuchter Grenzwert. □