Übungsaufgaben 6

Differenzierbare Funktionen

Aufgabe 1. Seien $a \geq b > 0$ und $\delta = \sqrt{a^2 - b^2} \geq 0$ gegeben sowie die *Ellipse* mit den Brennpunkten $z_+ = (\delta, 0) \in \mathbb{C}$ und $z_- = (-\delta, 0) \in \mathbb{C}$ sowie den Halbachsen a und b durch die Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ beschrieben, welche durch

$$f(t) = (a \cos t, b \sin t) \quad \text{für } t \in [0, 2\pi]$$

definiert wird. Sei ferner $\tau \in [0, 2\pi]$ ein beliebig fixierter Punkt.

1. Man weise nach, daß $|f(\tau) - z_+| + |f(\tau) - z_-| = 2a$ gilt, somit die Kreislinien

$$\{x \in \mathbb{C} \mid |x - z_-| = 2a\} \quad \text{und} \quad \{x \in \mathbb{C} \mid |x - f(\tau)| = |z_+ - f(\tau)|\}$$

genau einen Punkt $x_+ \in \mathbb{C}$ und die Kreislinien

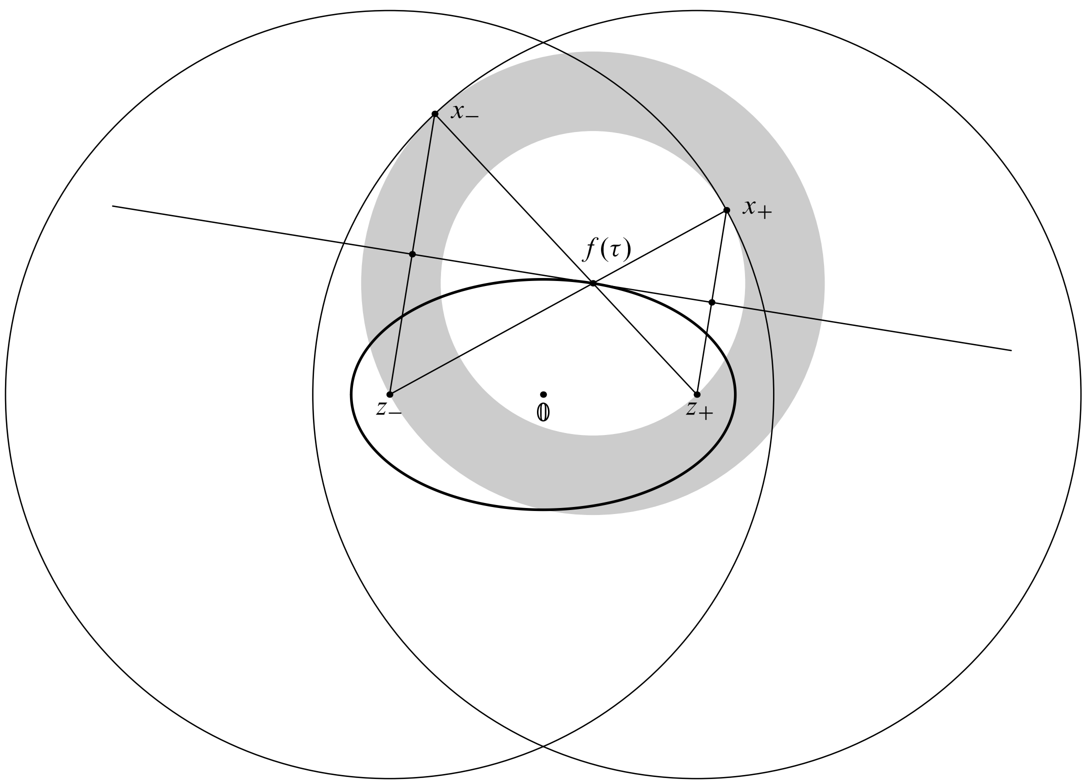
$$\{x \in \mathbb{C} \mid |x - z_+| = 2a\} \quad \text{und} \quad \{x \in \mathbb{C} \mid |x - f(\tau)| = |z_- - f(\tau)|\}$$

genau einen Punkt $x_- \in \mathbb{C}$ gemeinsam haben!

2. Wird die Linearisierung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, welche f in τ tangential berührt, durch

$$g(t) = f(\tau) + Df(\tau)(t - \tau) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

gegeben, so zeige man, daß es Punkte $t_+ \in \mathbb{R}$ und $t_- \in \mathbb{R}$ mit $g(t_+) = \frac{1}{2}(x_+ + z_+)$ und $g(t_-) = \frac{1}{2}(x_- + z_-)$ gibt und außerdem $|g(t_+)| = |g(t_-)| = a$ gilt! ⑧



Lösung. 1.1. Wegen $a^2 = b^2 + \delta^2$ und $\cos^2\tau + \sin^2\tau = 1$ gilt für das Abstandsquadrat

$$\begin{aligned} |f(\tau) - z_\pm|^2 &= (a\cos\tau \mp \delta)^2 + (b\sin\tau)^2 \\ &= a^2\cos^2\tau \mp 2a\delta\cos\tau + \delta^2 + b^2\sin^2\tau \\ &= \delta^2\cos^2\tau \mp 2a\delta\cos\tau + (b^2+\delta^2) = (a \mp \delta\cos\tau)^2, \end{aligned}$$

woraus sich aufgrund von $0 \le \delta < a$ die Beziehungen

$$|f(\tau) - z_+| = a - \delta\cos\tau \quad \text{und} \quad |f(\tau) - z_-| = a + \delta\cos\tau$$

und somit $|f(\tau) - z_+| + |f(\tau) - z_-| = 2a$ ergeben.

1.2. Für $x_\pm \in \mathbb{C}$ mit $|x_\pm - z_\mp| = 2a$ und $|x_\pm - f(\tau)| = |f(\tau) - z_\pm|$ gilt demnach

$$|x_\pm - z_\mp| = 2a = |f(\tau) - z_+| + |f(\tau) - z_-| = |x_\pm - f(\tau)| + |f(\tau) - z_\mp|.$$

Die Punkte $z_\mp$, $f(\tau)$, $x_\pm$ liegen somit auf einer Strecke. Es gibt daher einen Parameter $\lambda_\pm > 1$, so daß die Darstellung $x_\pm = \lambda_\pm f(\tau) + (1-\lambda_\pm)z_\mp$ gilt. Daraus folgt

$$2a = |x_\pm - z_\mp| = \lambda_\pm|f(\tau) - z_\mp| = \lambda_\pm(a \pm \delta\cos\tau), \quad \text{also } \lambda_\pm = \frac{2a}{a \pm \delta\cos\tau}.$$

2.1. Wegen $z_+ + z_- = \mathbb{0}$ ergibt sich demzufolge für die Streckenmittelpunkte

$$\frac{x_\pm + z_\pm}{2} = \frac{x_\pm - z_\mp}{2} \quad \text{und somit} \quad \left|\frac{x_\pm + z_\pm}{2}\right| = \frac{2a}{2} = a.$$

2.2. Die Linearisierung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, welche f in τ tangential berührt, wird durch

$$g(t) = (a\cos\tau, b\sin\tau) + (t-\tau)(-a\sin\tau, b\cos\tau) \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \text{ gegeben.}$$

Um jeweils eine Lösung $t_\pm \in \mathbb{R}$ der linearen Gleichung $g(t_\pm) = \frac{1}{2}(x_\pm + z_\pm)$ zu finden, untersucht man Real- und Imaginärteil

$$\begin{aligned} a\cos\tau - a(t_\pm - \tau)\sin\tau &= \frac{a(a\cos\tau \pm \delta)}{a \pm \delta\cos\tau} \\ b\sin\tau + b(t_\pm - \tau)\cos\tau &= \frac{ab\sin\tau}{a \pm \delta\cos\tau} \end{aligned}$$

und erhält durch äquivalente Umformungen

$$\begin{aligned} (t_\pm - \tau)\sin\tau &= \cos\tau - \frac{a\cos\tau \pm \delta}{a \pm \delta\cos\tau} = \frac{\mp\delta\sin^2\tau}{a \pm \delta\cos\tau} \\ (t_\pm - \tau)\cos\tau &= \frac{a\sin\tau}{a \pm \delta\cos\tau} - \sin\tau = \frac{\mp\delta\sin\tau\cos\tau}{a \pm \delta\cos\tau}. \end{aligned}$$

Somit erfüllt der durch

$$t_\pm - \tau = \frac{\mp\delta\sin\tau}{a \pm \delta\cos\tau}$$

gegebene Punkt $t_\pm \in \mathbb{R}$ jeweils die Gleichung $g(t_\pm) = \frac{1}{2}(x_\pm + z_\pm)$. □

Aufgabe 2. Seien die Intervalle $X_1 =]-\infty, -1[$, $X_2 =]-1, 1[$ und $X_3 =]1, \infty[$ und die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sowie $g : X_1 \cup X_2 \cup X_3 \to \mathbb{R}$ wie folgt definiert:

$$f(x) = \arctan x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{2} \arctan \frac{2x}{1-x^2} \quad \text{für } x \in X_1 \cup X_2 \cup X_3.$$

1. Man weise nach, daß $Df(x) = Dg(x)$ für alle $x \in X_1 \cup X_2 \cup X_3$ gilt!
2. Man zeige, daß es Konstanten $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ gibt, so daß für jedes $\ell \in \{1, 2, 3\}$

$$f(x) - g(x) = a_\ell \quad \text{für alle } x \in X_\ell$$

gilt und berechne diese Konstanten $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$! ⑥

Lösung. 1. Aufgrund der Gestalt der Ableitung

$$D \arctan\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{b^2}{b^2 + a^2} \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} Dg(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^2}{(1-x^2)^2 + (2x)^2} \cdot \frac{2(1-x^2) + (2x)^2}{(1-x^2)^2} \\ &= \frac{(1-x^2) + 2x^2}{(1-x^2)^2 + (2x)^2} = \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} = Df(x) \end{aligned}$$

für jedes $x \in X_1 \cup X_2 \cup X_3$ aufgrund der Kettenregel.

2. Seien $\ell \in \{1, 2, 3\}$ sowie $x, y \in X_\ell$ mit $x < y$ beliebig vorgegeben. Aufgrund von Schritt 1 hat die Funktion $h = f - g$ für jedes $z \in [x, y]$ die Ableitung $Dh(z) = 0$. Somit liefert der Mittelwertsatz die Abschätzung

$$|h(x) - h(y)| \leq |x - y| \sup_{z \in [x,y]} |Dh(z)| = 0,$$

woraus $h(x) = h(y)$ für alle $x, y \in X_\ell$ folgt. Somit gibt es Konstanten $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, so daß $f(x) - g(x) = a_\ell$ für alle $x \in X_\ell$ und jedes $\ell \in \{1, 2, 3\}$ gilt.

2.1. Fall $x \in X_1 =]-\infty, -1[$: Mit $\lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$ und $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{1-x^2} = 0$ erhält man die Konstante

$$a_1 = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to -\infty} \arctan x - \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2} \arctan \frac{2x}{1-x^2} = -\frac{\pi}{2}.$$

2.2. Im Falle $x \in X_2 =]-1, 1[$ wählt man $x = 0$ und erhält $a_2 = f(0) - g(0) = 0$.

2.3. Fall $x \in X_3 =]1, \infty[$: Wegen $\lim_{x \to \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ und $\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{1-x^2} = 0$ ergibt sich die Konstante

$$a_3 = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to \infty} \arctan x - \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2} \arctan \frac{2x}{1-x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Somit sind alle drei Konstanten $a_1 = -\frac{\pi}{2}$, $a_2 = 0$ und $a_3 = \frac{\pi}{2}$ bestimmt. □

Aufgabe 3. Man zeige durch vollständige Induktion über $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und Differentiation, daß die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{\ell+k}{\ell} x^k\right)$ für jedes $x \in \mathbb{K}$, $|x| < 1$ gegen die Summe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\ell+k}{\ell} x^k = \frac{\mathbb{1}}{(\mathbb{1}-x)^{\ell+1}}$$

konvergiert! ⑥

Lösung. 1. Sei $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ beliebig festgehalten. Die Potenzreihe (s_n) um den Mittelpunkt $x_0 = \mathbb{0}$ mit den durch $a_k = \binom{\ell+k}{\ell}$ für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vorgegebenen Koeffizienten (a_k) hat wegen der Beziehung

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(\ell+k+1)!\,\ell!\,k!}{\ell!\,(k+1)!\,(\ell+k)!} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ell+k+1}{k+1} = 1$$

den Konvergenzradius $R = 1$ und konvergiert somit in $X = \{x \in \mathbb{K} \mid |x| < 1\}$ gegen eine differenzierbare Grenzfunktion $s : X \to \mathbb{K}$. Ferner konvergiert die summandenweise differenzierte Potenzreihe (Ds_n) um den Mittelpunkt $x_0 = \mathbb{0}$ mit den Koeffizienten $((k+1)a_{k+1})$ in X gegen die Ableitung $Ds : X \to \mathbb{K}$ von $s : X \to \mathbb{K}$.

2. Die Summenformel wird induktiv über den Parameter $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ bewiesen:

Induktionsanfang: Im Falle $\ell = 0$ gilt $\binom{\ell+k}{\ell} = 1$ für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Die Konvergenz der geometrischen Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)$ gegen die Summe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1}-x} \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{K} \text{ mit } |x| < 1$$

liefert somit die Gültigkeit des Induktionsanfangs.

Induktionsschritt: Es sei induktiv vorausgesetzt, daß die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{\ell+k}{\ell} x^k\right)$ für ein $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und jedes $x \in X$ gegen die Summe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\ell+k}{\ell} x^k = \frac{\mathbb{1}}{(\mathbb{1}-x)^{\ell+1}}$$

konvergiert. Wegen Schritt 1 konvergiert die summandenweise differenzierte Potenzreihe in X gegen die Ableitung der Grenzfunktion. Die Kettenregel liefert somit

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \binom{\ell+k+1}{\ell} x^k = \frac{\ell+1}{(\mathbb{1}-x)^{\ell+2}} \quad \text{für jedes } x \in X.$$

Da für jedes $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ die Beziehung

$$\frac{k+1}{\ell+1} \binom{\ell+k+1}{\ell} = \frac{k+1}{\ell+1} \cdot \frac{(\ell+k+1)!}{\ell!\,(k+1)!} = \frac{(\ell+1+k)!}{(\ell+1)!\,k!} = \binom{\ell+1+k}{\ell+1}$$

gilt, ergibt sich daraus schließlich die Induktionsbehauptung. □

Aufgabe 4. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $|b| < a$ vorgegeben. Man zeige, daß die Funktion $f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{a \sin x + b}{a + b \sin x} \quad \text{für } x \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[$$

korrekt definiert ist und

$$Df(x) = \frac{1}{a + b \sin x} \quad \text{für alle } x \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[$$

als Ableitung besitzt!

Lösung. 1. Wegen $a > 0$, $|b| < a$ und $\sin x \in \left]-1, 1\right[$ für alle $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ gelten

$$a + b \sin x > 0, \quad b(1 - \sin x) < a(1 - \sin x) \quad \text{sowie} \quad a(1 + \sin x) > -b(1 + \sin x)$$

und somit

$$-(a + b \sin x) < a \sin x + b < a + b \sin x, \quad \text{also} \quad \left| \frac{a \sin x + b}{a + b \sin x} \right| < 1.$$

2. Aufgrund der Gestalt der Ableitung

$$D \arcsin\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{d}{\sqrt{d^2 - c^2}} \quad \text{für alle } c, d \in \mathbb{R} \text{ mit } d > 0 \text{ und } |c| < d$$

erhält man aufgrund der Produkt- und Kettenregel

$$\begin{aligned} Df(x) &= \frac{(a + b \sin x) \cdot \big((a + b \sin x)\, a \cos x - (a \sin x + b)\, b \cos x\big)}{\sqrt{a^2 - b^2} \cdot \sqrt{(a + b \sin x)^2 - (a \sin x + b)^2} \cdot (a + b \sin x)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(a^2 - b^2)(1 - \sin^2 x)}} \cdot \frac{(a^2 - b^2) \cos x}{a + b \sin x} = \frac{1}{a + b \sin x} \end{aligned}$$

für alle $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. $\square$

Aufgabe 5. Man zeige durch Differentiation, daß die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}(-1)^k x^{2k+1}\right)$ für jedes $x \in \,]-1,1[$ gegen den Grenzwert $\arctan x \in \mathbb{R}$ konvergiert!

Lösung. 1. Die Potenzreihe (s_n) um $x_0 = 0$ mit den durch $a_{2k+1} = \frac{1}{2k+1}(-1)^k$ und $a_{2k} = 0$ für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definierten Koeffizienten (a_k) hat wegen der Beziehung

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} = 1$$

den Konvergenzradius $R = 1$ und konvergiert somit in $]-1,1[$ gegen eine differenzierbare Grenzfunktion $s : \,]-1,1[\, \to \mathbb{R}$.

2. Die summandenweise differenzierte Potenzreihe (Ds_n) um $x_0 = 0$ mit den Koeffizienten $((k+1)a_{k+1})$ hat ebenfalls den Konvergenzradius $R = 1$ und konvergiert in $]-1,1[$ gegen die Ableitung $Ds : \,]-1,1[\, \to \mathbb{R}$ der Grenzfunktion $s : \,]-1,1[\, \to \mathbb{R}$. Es gilt somit

$$Ds(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| < 1$$

aufgrund der Summenformel der geometrischen Reihe.

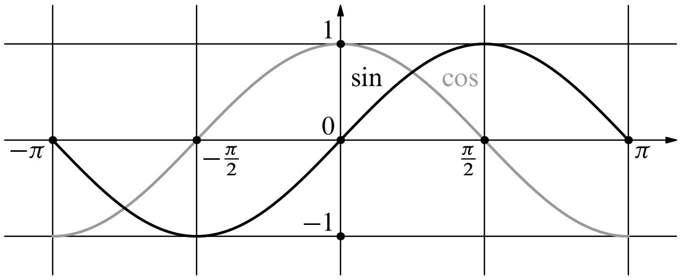
3. Die durch $f(x) = \arctan x$ für $x \in \mathbb{R}$ definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt ebenfalls die Ableitung

$$Df(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Aufgrund von Schritt 2 hat die Funktion $h = s - f$ für jedes $z \in \,]-1,1[$ die Ableitung $Dh(z) = 0$. Der Mittelwertsatz liefert somit

$$|h(x) - h(0)| \leq |x| \sup_{\theta\in[0,1]} |Dh(\theta x)| = 0 \quad \text{für alle } x \in \,]-1,1[,$$

also $h(x) = h(0)$ für alle $x \in \,]-1,1[$. Da $f(0) = 0$ sowie $s(0) = s_n(0) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt, ergibt sich schließlich $s(x) = f(x)$ für alle $x \in \,]-1,1[$. $\square$



Aufgabe 6. Man zeige, daß die Funktionen sin, cos : $\mathbb{R} \to [-1, 1]$ differenzierbar sind und die Ableitungen

$$D \sin(\theta) = \cos\theta \quad \text{bzw.} \quad D \cos(\theta) = -\sin\theta \quad \text{für alle } \theta \in \mathbb{R} \text{ besitzen!}$$

Lösung. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelten die Additionstheoreme

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$$

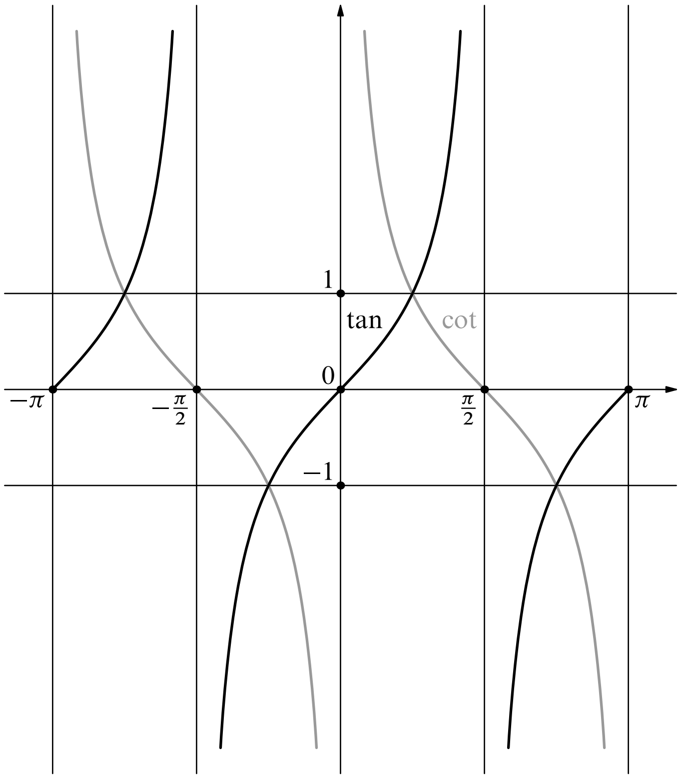
Setzt man $x = \frac{\beta+\theta}{2} \in \mathbb{R}$ und $y = \frac{\beta-\theta}{2} \in \mathbb{R}$ für $\beta, \theta \in \mathbb{R}$ ein, so erhält man

$$\sin\beta - \sin\theta = \sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos x \sin y = 2\cos\frac{\beta+\theta}{2}\sin\frac{\beta-\theta}{2},$$
$$\cos\beta - \cos\theta = \cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin x \sin y = -2\sin\frac{\beta+\theta}{2}\sin\frac{\beta-\theta}{2}.$$

Wegen der Stetigkeit der Funktionen sin, cos : $\mathbb{R} \to [-1, 1]$ und der Grenzwertbeziehung $\lim_{\beta\to\theta} \frac{2}{\beta-\theta} \sin\frac{\beta-\theta}{2} = 1$ folgt daraus für alle $\theta \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\beta\to\theta} \frac{\sin\beta - \sin\theta}{\beta-\theta} = \lim_{\beta\to\theta} \cos\frac{\beta+\theta}{2} \cdot \lim_{\beta\to\theta} \frac{2}{\beta-\theta}\sin\frac{\beta-\theta}{2} = \cos\theta,$$
$$\lim_{\beta\to\theta} \frac{\cos\beta - \cos\theta}{\beta-\theta} = -\lim_{\beta\to\theta} \sin\frac{\beta+\theta}{2} \cdot \lim_{\beta\to\theta} \frac{2}{\beta-\theta}\sin\frac{\beta-\theta}{2} = -\sin\theta,$$

das heißt, die beiden Funktionen sin, cos : $\mathbb{R} \to [-1, 1]$ besitzen die Ableitungen $D\sin(\theta) = \cos\theta$ bzw. $D\cos(\theta) = -\sin\theta$ für alle $\theta \in \mathbb{R}$. □



Aufgabe 7. Man beweise, daß die Funktionen $\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$ sowie $\cot : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind und folgende Ableitungen haben:

$$D\tan(\theta) = 1 + \tan^2\theta \qquad \text{für alle } \theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\tfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\},$$
$$D\cot(\theta) = -1 - \cot^2\theta \qquad \text{für alle } \theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Lösung. Da die Funktionen $\sin, \cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ differenzierbar sind und

$$D\sin(\theta) = \cos\theta \quad \text{bzw.} \quad D\cos(\theta) = -\sin\theta \quad \text{für alle } \theta \in \mathbb{R}$$

gilt, liefert die Quotientenregel sowohl

$$D\tan(\theta) = \frac{\cos\theta \cdot D\sin(\theta) - \sin\theta \cdot D\cos(\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta$$

für alle $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ sowie

$$D\cot(\theta) = \frac{\sin\theta \cdot D\cos(\theta) - \cos\theta \cdot D\sin(\theta)}{\sin^2\theta} = -\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta} = -1 - \cot^2\theta$$

für alle $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. $\square$

Aufgabe 8. Man weise nach, daß die inverse Funktion $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ von $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ sowie die inverse Funktion $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ von $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ jeweils auf $]-1, 1[$ differenzierbar ist und die Ableitungen

$$D \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{bzw.} \quad D \arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{für alle } x \in \,]-1, 1[\text{ hat!}$$

Lösung. 1. Für $\beta, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ gilt $\frac{\beta+\theta}{2}, \frac{\beta-\theta}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ und das Additionstheorem

$$\sin\beta - \sin\theta = 2\cos\frac{\beta+\theta}{2}\sin\frac{\beta-\theta}{2}\,.$$

Im Falle $\sin\beta - \sin\theta = 0$ folgt daraus $\cos\frac{\beta+\theta}{2} = 0$ oder $\sin\frac{\beta-\theta}{2} = 0$ und somit $\beta = \theta$, also die Injektivität von $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$. Die Stetigkeit dieser Funktion überträgt sich auf ihre Inverse $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Da $D\sin(\theta) = \cos\theta > 0$ für alle $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ gilt, ergibt sich die Differenzierbarkeit von arcsin auf $]-1, 1[$ und

$$D \arcsin(x) = \frac{1}{D\sin(\theta)} = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

für alle $x \in \,]-1, 1[$ und das $x = \sin\theta$ entsprechende $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

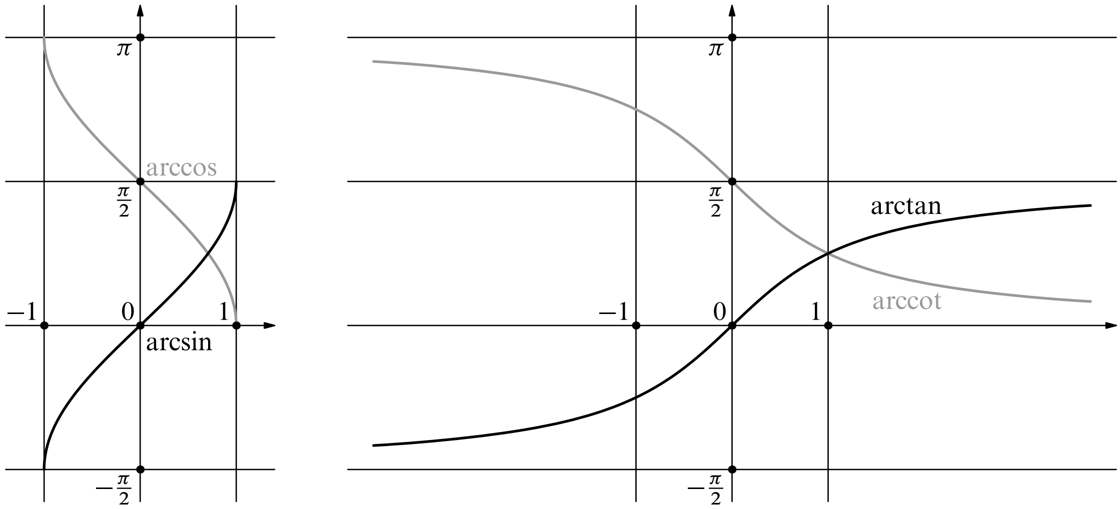
2. Für alle $\beta, \theta \in [0, \pi]$ gilt $\frac{\beta-\theta}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{\beta+\theta}{2} \in [0, \pi]$ und das Additionstheorem

$$\cos\beta - \cos\theta = -2\sin\frac{\beta+\theta}{2}\sin\frac{\beta-\theta}{2}\,.$$

Im Falle $\cos\beta - \cos\theta = 0$ folgt daraus $\sin\frac{\beta+\theta}{2} = 0$ oder $\sin\frac{\beta-\theta}{2} = 0$, also $\beta = \theta$ und somit die Injektivität von $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$. Die Stetigkeit dieser Funktion überträgt sich auf ihre Inverse $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$. Da $D\cos(\theta) = -\sin\theta < 0$ für alle $\theta \in \,]0, \pi[$ gilt, ergibt sich die Differenzierbarkeit von arccos auf $]-1, 1[$ und

$$D \arccos(x) = \frac{1}{D\cos(\theta)} = -\frac{1}{\sin\theta} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

für alle $x \in \,]-1, 1[$ und das entsprechende $\theta \in \,]0, \pi[$ mit $x = \cos\theta$. □



Aufgabe 9. Man zeige, daß die Inverse $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ von $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ sowie $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to]0, \pi[$ von $\cot :]0, \pi[\to \mathbb{R}$ jeweils differenzierbar ist und

$$D \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{bzw.} \quad D \operatorname{arccot}(x) = -\frac{1}{1+x^2} \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R} \text{ gilt!}$$

Lösung. 1. Für alle $\beta, \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ gilt $\beta - \theta \in]-\pi, \pi[$ und das Additionstheorem

$$\tan\beta - \tan\theta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin(\beta-\theta)}{\cos\beta\cos\theta}.$$

Im Falle $\tan\beta - \tan\theta = 0$ folgt daraus $\sin(\beta - \theta) = 0$ und somit $\beta = \theta$, also die Injektivität von $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$. Somit überträgt sich die Stetigkeit dieser Funktion auf ihre Inverse $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Wegen $D\tan(\theta) = 1 + \tan^2\theta > 0$ für alle $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ergibt sich demnach die Differenzierbarkeit von arctan sowie

$$D \arctan(x) = \frac{1}{D\tan(\theta)} = \frac{1}{1+\tan^2\theta} = \frac{1}{1+x^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und das $x = \tan\theta$ entsprechende $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

2. Für alle $\beta, \theta \in]0, \pi[$ gilt $\beta - \theta \in]-\pi, \pi[$ und das Additionstheorem

$$\cot\beta - \cot\theta = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = -\frac{\sin(\beta-\theta)}{\sin\beta\sin\theta}.$$

Im Falle $\cot\beta - \cot\theta = 0$ folgt daraus $\sin(\beta - \theta) = 0$ und somit $\beta = \theta$, also die Injektivität von $\cot :]0, \pi[\to \mathbb{R}$. Damit überträgt sich die Stetigkeit dieser Funktion auf ihre Inverse $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to]0, \pi[$. Da $D\cot(\theta) = -1 - \cot^2\theta < 0$ für alle $\theta \in]0, \pi[$ gilt, ergibt sich daraus die Differenzierbarkeit von arccot und

$$D \operatorname{arccot}(x) = \frac{1}{D\cot(\theta)} = -\frac{1}{1+\cot^2\theta} = -\frac{1}{1+x^2}$$

für alle $x \in]-1, 1[$ und das entsprechende $\theta \in]0, \pi[$ mit $x = \cot\theta$. □

Aufgabe 10. Sei die *Hyperbel* durch die Funktion $h :]0,\pi[\cup]\pi, 2\pi[\to \mathbb{C}$ vermöge

$$h(t) = \left(\frac{1}{\sin t}, \frac{\cos t}{\sin t}\right) \quad \text{für } t \in]0,\pi[\cup]\pi, 2\pi[,$$

die *Lemniskate* durch die Funktion $s : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mittels

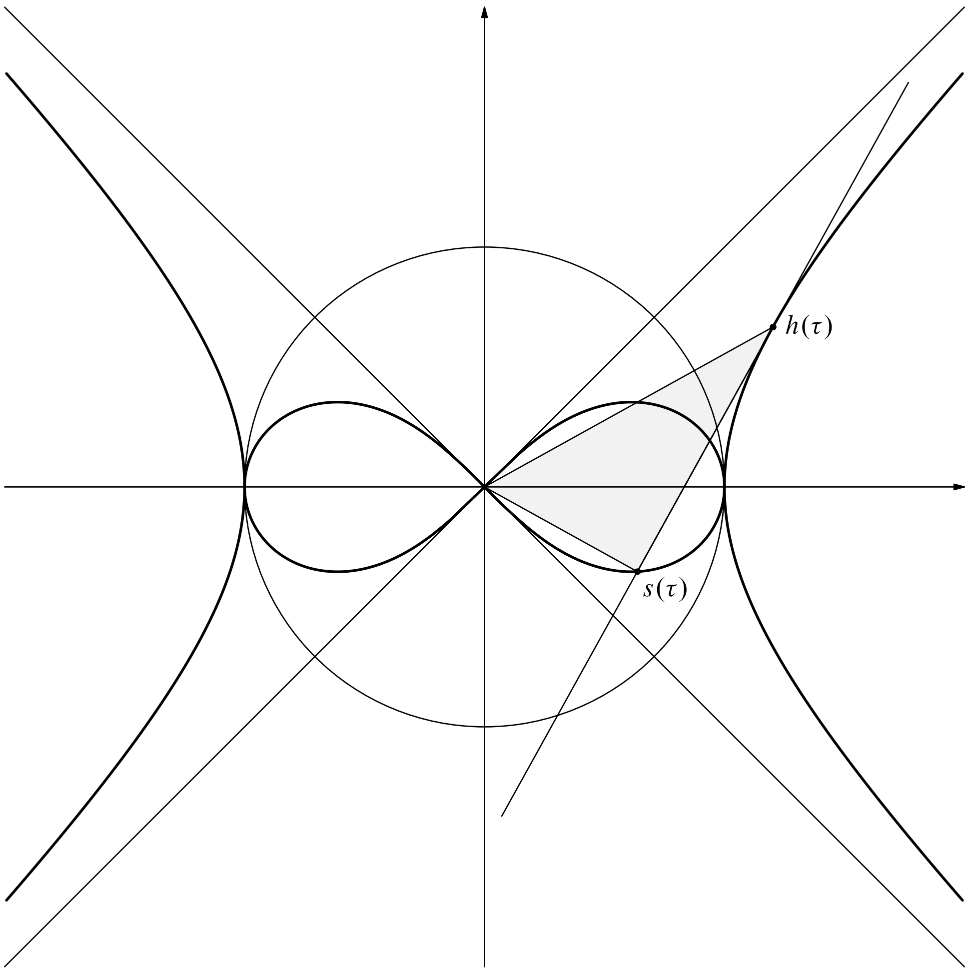
$$s(t) = \left(\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}, -\frac{\sin t \cos t}{1+\cos^2 t}\right) \quad \text{für } t \in [0, 2\pi]$$

sowie ein beliebiger Punkt $\tau \in]0,\pi[\cup]\pi, 2\pi[$ vorgegeben.

1. Man zeige, daß $h(\tau)s(\tau) = \mathbb{1}$ sowie $|h(\tau)|^2 = |h(\tau) - s(\tau)|^2 + |s(\tau)|^2$ gilt!
2. Wird die Linearisierung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, welche h in τ tangential berührt, durch

$$g(t) = h(\tau) + Dh(\tau)(t - \tau) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

gegeben, so weise man nach, daß stets ein $t \in \mathbb{R}$ mit $g(t) = s(\tau)$ existiert!



Lösung. Sei $\tau \in]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$ beliebig vorgegeben.

1. Offenbar gelten in der Tat die Beziehungen

$$h(\tau)s(\tau) = \left(\frac{1}{\sin\tau}, \frac{\cos\tau}{\sin\tau}\right)\left(\frac{\sin\tau}{1+\cos^2\tau}, -\frac{\sin\tau\cos\tau}{1+\cos^2\tau}\right) = \frac{(1,\cos\tau)(1,-\cos\tau)}{1+\cos^2\tau} = \mathbb{1}$$

sowie

$$\begin{aligned}|h(\tau)-s(\tau)|^2 &= \left(\frac{1}{\sin\tau} - \frac{\sin\tau}{1+\cos^2\tau}\right)^2 + \left(\frac{\cos\tau}{\sin\tau} + \frac{\sin\tau\cos\tau}{1+\cos^2\tau}\right)^2 \\ &= \frac{4\cos^4\tau}{\sin^2\tau\,(1+\cos^2\tau)^2} + \frac{4\cos^2\tau}{\sin^2\tau\,(1+\cos^2\tau)^2} \\ &= \frac{4\cos^2\tau}{\sin^2\tau\,(1+\cos^2\tau)} = \frac{(1+\cos^2\tau)^2-(1-\cos^2\tau)^2}{\sin^2\tau\,(1+\cos^2\tau)}\end{aligned}$$

und somit

$$|h(\tau)-s(\tau)|^2 = \frac{1+\cos^2\tau}{\sin^2\tau} - \frac{\sin^2\tau}{1+\cos^2\tau} = |h(\tau)|^2 - |s(\tau)|^2.$$

2. Die Linearisierung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, welche h in τ tangential berührt, wird durch

$$g(t) = \left(\frac{1}{\sin\tau}, \frac{\cos\tau}{\sin\tau}\right) + (t-\tau)\left(-\frac{\cos\tau}{\sin^2\tau}, -\frac{1}{\sin^2\tau}\right) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

gegeben. Um eine Lösung $t \in \mathbb{R}$ der Gleichung $g(t) = s(\tau)$ zu finden, untersucht man die beiden linearen Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\sin\tau - (t-\tau)\cos\tau}{\sin^2\tau} &= \frac{\sin\tau}{1+\cos^2\tau} \\ \frac{\sin\tau\cos\tau - (t-\tau)}{\sin^2\tau} &= -\frac{\sin\tau\cos\tau}{1+\cos^2\tau}\end{aligned}$$

und erhält durch äquivalente Umformungen

$$\begin{aligned}(t-\tau)\cos\tau &= \left(1 - \frac{\sin^2\tau}{1+\cos^2\tau}\right)\sin\tau = \frac{2\sin\tau\cos^2\tau}{1+\cos^2\tau} \\ t-\tau &= \left(1 + \frac{\sin^2\tau}{1+\cos^2\tau}\right)\sin\tau\cos\tau = \frac{2\sin\tau\cos\tau}{1+\cos^2\tau}\end{aligned}$$

tatsächlich einen Punkt $t \in \mathbb{R}$, der die Gleichung $g(t) = s(\tau)$ erfüllt. $\square$