Übungsaufgaben 7

# Analytische Funktionen

**Aufgabe 1.** Sei die Funktion $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $s(x) = (1-\cos x)(x-\sin x)$ für $x \in \mathbb{R}$ definiert. Man entwickle die Funktion $s$ in eine Potenzreihe $(s_n)$ um den Mittelpunkt $x_0 = 0$ und berechne ihre Koeffizienten! ⑥

*Lösung.* Mit Hilfe des Additionstheorems $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ werden Umformungen unternommen, die eine Verwendung der Potenzreihen für Sinus und Cosinus um den Mittelpunkt $x_0 = 0$ gestatten: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$s(x) = x - x\cos x - \sin x + \sin x \cos x = x - x \cos x - \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Die Potenzreihen

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad \text{und} \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

für Sinus und Cosinus liefern somit für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Entwicklung

$$\begin{aligned}
s(x) &= x - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (2x)^{2k+1} \\
&= x + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \big(4^k - (2k+1) - 1\big) x^{2k+1} \\
&= x - x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \big(4^k - 2(k+1)\big) x^{2k+1} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \big(4^k - 2(k+1)\big) x^{2k+1}
\end{aligned}$$

der Funktion $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in eine Potenzreihe um den Mittelpunkt $x_0 = 0$. □

**Aufgabe 2.** Der Cosinus $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soll im Punkt $x_0 = 0$ durch eine Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ approximiert werden, welche eine Hyperbel beschreibt und durch

$$h(x) = c - \sqrt{b + ax^2} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

gegeben ist. Wie müssen die reellen Zahlen $a > 0$, $b > 0$ und $c \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit sich die Funktionen $h$ und cos im Punkt $x_0 = 0$ von maximaler Ordnung tangential berühren? ⑥

*Lösung.* 1. Damit beide Funktionswerte $h(0) = \cos 0 = 1$ übereinstimmen, müssen $c \in \mathbb{R}$ und $b > 0$ folgende Bedingung erfüllen:

$$c - \sqrt{b} = 1. \tag{1}$$

Da die erste Ableitung von $h$ in $x \in \mathbb{R}$ die Gestalt

$$Dh(x) = -\frac{ax}{\sqrt{b + ax^2}}$$

besitzt, verschwinden die ersten Ableitungen $Dh(0) = D\cos(0) = 0$ gleichzeitig.

2. Die zweite Ableitung von $h$ in $x \in \mathbb{R}$ wird durch

$$D^2h(x) = -\frac{a \cdot (b + ax^2)}{(b + ax^2)^{3/2}} + \frac{ax \cdot ax}{(b + ax^2)^{3/2}} = -\frac{ab}{(b + ax^2)^{3/2}}$$

gegeben. Somit stimmen die zweiten Ableitungen $D^2h(0) = D^2\cos(0) = -1$ überein, wenn $a > 0$ und $b > 0$ folgende Beziehung erfüllen:

$$a = \sqrt{b}. \tag{2}$$

Da die dritte Ableitung von $h$ in $x \in \mathbb{R}$ von der Form

$$D^3h(x) = \frac{3a^2bx}{(b + ax^2)^{5/2}}$$

ist, verschwinden die dritten Ableitungen $D^3h(0) = D^3\cos(0) = 0$ gleichermaßen.

3. Die vierte Ableitung von $h$ in $x \in \mathbb{R}$ wird durch

$$D^4h(x) = \frac{3a^2b \cdot (b + ax^2)}{(b + ax^2)^{7/2}} - \frac{3a^2bx \cdot 5ax}{(b + ax^2)^{7/2}} = \frac{3a^2b(b - 4ax^2)}{(b + ax^2)^{7/2}}$$

gegeben. Daher sind die vierten Ableitungen $D^4h(0) = D^4\cos(0) = 1$ identisch, wenn $a > 0$ und $b > 0$ folgender Bedingung genügen:

$$3a^2 = b\sqrt{b}. \tag{3}$$

4. Aus den Bedingungen (2) und (3) folgt somit $a = 3$ und $b = 9$, woraus sich wegen (1) auch $c = 4$ ergibt. Da die fünfte Ableitung von $h$ in $x \in \mathbb{R}$ die Gestalt

$$D^5h(x) = -\frac{24a^3bx \cdot (b + ax^2)}{(b + ax^2)^{9/2}} - \frac{3a^2b(b - 4ax^2) \cdot 7ax}{(b + ax^2)^{9/2}} = \frac{15a^3bx(4ax^2 - 3b)}{(b + ax^2)^{9/2}}$$

hat, verschwinden auch noch die fünften Ableitungen $D^5h(0) = D^5\cos(0) = 0$. □

*Alternative Lösung.* 1. Aufgrund der Summenformel

$$\sqrt{1+\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} \xi^k = 1 + \frac{\xi}{2} - \frac{\xi^2}{8} + \frac{\xi^3}{16} + \sum_{k=4}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} \xi^k \quad \text{für } \xi \in \left]-1, 1\right[$$

der binomischen Reihe zum Exponenten $\frac{1}{2}$ mit den Binomialkoeffizienten

$$\binom{\frac{1}{2}}{0} = 1, \qquad \binom{\frac{1}{2}}{k} = \prod_{\ell=1}^{k} \frac{\frac{1}{2} - \ell + 1}{\ell} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

ergibt sich für die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Darstellung

$$\begin{aligned} h(x) &= c - \sqrt{b\left(1 + \frac{ax^2}{b}\right)} = c - \sqrt{b} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} \left(\frac{ax^2}{b}\right)^k \\ &= \left(c - \sqrt{b}\right) - \frac{a\sqrt{b}}{2b} x^2 + \frac{a^2\sqrt{b}}{8b^2} x^4 - \frac{a^3\sqrt{b}}{16b^3} x^6 - \sqrt{b} \sum_{k=4}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} \left(\frac{ax^2}{b}\right)^k \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $ax^2 < b$ und die reellen Parameter $a > 0$, $b > 0$ und $c \in \mathbb{R}$.

2. Wegen der Gestalt der Cosinus-Reihe

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \tag{4}$$

haben $f$ und cos im Punkt $x_0 = 0$ somit eine tangentiale Berührung von mindestens fünfter Ordnung, wenn die Bedingungen

$$c - \sqrt{b} = 1, \quad a = \sqrt{b} \quad \text{sowie} \quad 3a^2 = b\sqrt{b}$$

erfüllt sind, was $a = 3$, $b = 9$ und $c = 4$ nach sich zieht und demnach

$$h(x) = 4 - \sqrt{9 + 3x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{144} - \sum_{k=4}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} \frac{x^{2k}}{3^{k-1}} \quad \text{für } x \in \left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[$$

liefert. Vergleicht man mit der Darstellung (4), so haben $f$ und cos im Punkt $x_0 = 0$ für diese Wahl der Parameter eine tangentiale Berührung fünfter Ordnung. □

**Aufgabe 3.** Sei die gebrochene rationale Funktion $s : \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\} \to \mathbb{C}$ durch

$$s(\xi) = \frac{\mathbb{1}}{\xi^2(\mathbb{1}-\xi)^2} \quad \text{für } \xi \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\} \text{ definiert.}$$

Man entwickle $s$ um einen beliebig vorgegebenen Mittelpunkt $\xi_0 \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ in eine Potenzreihe $(s_n)$ und berechne deren Koeffizienten sowie Konvergenzradius! ⑧

*Lösung.* Um die Summenformel der geometrischen Potenzreihe und ihrer Ableitung benutzen zu können, wird die Funktion $s : \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\} \to \mathbb{C}$ in Teilbrüche zerlegt:

1. Im Teilbruchansatz

$$\frac{\mathbb{1}}{\xi^2(\mathbb{1}-\xi)^2} = \frac{a}{\xi} + \frac{b}{\xi^2} + \frac{c}{\mathbb{1}-\xi} + \frac{d}{(\mathbb{1}-\xi)^2}$$

werden die unbekannten Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ bestimmt: Für alle $\xi \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{1} &= a\xi(\mathbb{1}-\xi)^2 + b(\mathbb{1}-\xi)^2 + c\xi^2(\mathbb{1}-\xi) + d\xi^2 \\ &= a(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) + b(\mathbb{1} - 2\xi + \xi^2) + c(\xi^2 - \xi^3) + d\xi^2 \\ &= b + (a-2b)\xi + (b - 2a + c + d)\xi^2 + (a-c)\xi^3, \end{aligned}$$

woraus sich durch Koeffizientenvergleich vor Termen gleicher Ordnung in $\xi$ das lineare Gleichungssystem mit vier Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbb{1} &= b \\ \mathbb{0} &= a - 2b \\ \mathbb{0} &= b - 2a + c + d \\ \mathbb{0} &= a - c \end{aligned}$$

für die vier Unbekannten $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ergibt. Aus der ersten und zweiten Gleichung folgen $b = \mathbb{1}$ und $a = \mathbb{2}$. Die vierte und die dritte Gleichung liefern dann $c = \mathbb{2}$ und $d = \mathbb{1}$. Daraus folgt die Teilbruchzerlegung

$$s(\xi) = \frac{\mathbb{1}}{\xi^2(\mathbb{1}-\xi)^2} = \frac{\mathbb{2}}{\xi} + \frac{\mathbb{2}}{\mathbb{1}-\xi} + \frac{\mathbb{1}}{\xi^2} + \frac{\mathbb{1}}{(\mathbb{1}-\xi)^2} \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}.$$

Für die Entwicklung von $s$ in eine Potenzreihe um einen beliebig vorgegebenen Punkt $\xi_0 \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ betrachtet man für $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ die Darstellung

$$\begin{aligned} s(\xi) &= \frac{\mathbb{2}}{\xi_0 + (\xi - \xi_0)} + \frac{\mathbb{2}}{(\mathbb{1}-\xi_0) - (\xi - \xi_0)} \\ &\quad + \frac{\mathbb{1}}{(\xi_0 + (\xi - \xi_0))^2} + \frac{\mathbb{1}}{((\mathbb{1}-\xi_0) - (\xi - \xi_0))^2} \\ &= \frac{\mathbb{2}}{\xi_0} \cdot \frac{\xi_0}{\xi_0 + (\xi - \xi_0)} + \frac{\mathbb{2}}{\mathbb{1}-\xi_0} \cdot \frac{\mathbb{1}-\xi_0}{(\mathbb{1}-\xi_0) - (\xi - \xi_0)} \\ &\quad + \frac{\mathbb{1}}{\xi_0^2} \cdot \frac{\xi_0^2}{(\xi_0 + (\xi - \xi_0))^2} + \frac{\mathbb{1}}{(\mathbb{1}-\xi_0)^2} \cdot \frac{(\mathbb{1}-\xi_0)^2}{((\mathbb{1}-\xi_0) - (\xi - \xi_0))^2}\,. \end{aligned}$$

2. Da die geometrische Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)$ für jedes $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 1$ gegen die Summe $\frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1}-x} \in \mathbb{C}$ konvergiert, erhält man für $x = -\frac{\xi-\xi_0}{\xi_0} \in \mathbb{C}$ bzw. $x = \frac{\xi-\xi_0}{\mathbb{1}-\xi_0} \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{\xi-\xi_0}{\xi_0}\right)^k = \frac{\xi_0}{\xi_0+(\xi-\xi_0)} \qquad \text{für } \xi \in \mathbb{C},\ |\xi-\xi_0| < |\xi_0|,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\xi-\xi_0}{\mathbb{1}-\xi_0}\right)^k = \frac{\mathbb{1}-\xi_0}{(\mathbb{1}-\xi_0)+(\xi-\xi_0)} \qquad \text{für } \xi \in \mathbb{C},\ |\xi-\xi_0| < |\xi_0-\mathbb{1}|$$

und somit für alle $\xi_0 \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ die Darstellung der ersten beiden Summanden

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{2}}{\xi_0+(\xi-\xi_0)} + \frac{\mathbb{2}}{(\mathbb{1}-\xi_0)-(\xi-\xi_0)} &= \frac{\mathbb{2}}{\xi_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{\xi-\xi_0}{\xi_0}\right)^k + \frac{\mathbb{2}}{\mathbb{1}-\xi_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\xi-\xi_0}{\mathbb{1}-\xi_0}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\mathbb{2}}{(\mathbb{1}-\xi_0)^{k+1}} - \frac{\mathbb{2}}{(-\xi_0)^{k+1}}\right)(\xi-\xi_0)^k\end{aligned}$$

für jedes $\xi \in \mathbb{C}$ mit $|\xi-\xi_0| < R_0 = \min\left\{|\xi_0|, |\xi_0-\mathbb{1}|\right\}$.

3. Da die summandenweise differenzierte Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k\right)$ für jedes $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 1$ gegen die Ableitung $\frac{\mathbb{1}}{(\mathbb{1}-x)^2} \in \mathbb{C}$ der Summe der geometrischen Reihe konvergiert, erhält man für die Argumente $x = -\frac{\xi-\xi_0}{\xi_0} \in \mathbb{C}$ bzw. $x = \frac{\xi-\xi_0}{\mathbb{1}-\xi_0} \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left(-\frac{\xi-\xi_0}{\xi_0}\right)^k = \frac{\xi_0^2}{(\xi_0+(\xi-\xi_0))^2} \qquad \text{für } \xi \in \mathbb{C},\ |\xi-\xi_0| < |\xi_0|,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left(\frac{\xi-\xi_0}{\mathbb{1}-\xi_0}\right)^k = \frac{(\mathbb{1}-\xi_0)^2}{((\mathbb{1}-\xi_0)+(\xi-\xi_0))^2} \qquad \text{für } \xi \in \mathbb{C},\ |\xi-\xi_0| < |\xi_0-\mathbb{1}|,$$

also für alle $\xi_0 \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ die Darstellung der letzten beiden Summanden

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{1}}{(\xi_0+(\xi-\xi_0))^2} + \frac{\mathbb{1}}{((\mathbb{1}-\xi_0)-(\xi-\xi_0))^2} &= \frac{\mathbb{1}}{\xi_0^2}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left(-\frac{\xi-\xi_0}{\xi_0}\right)^k \\ &\quad + \frac{\mathbb{1}}{(\mathbb{1}-\xi_0)^2}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left(\frac{\xi-\xi_0}{\mathbb{1}-\xi_0}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k+1}{(\mathbb{1}-\xi_0)^{k+2}} + \frac{k+1}{(-\xi_0)^{k+2}}\right)(\xi-\xi_0)^k\end{aligned}$$

für jedes $\xi \in \mathbb{C}$ mit $|\xi-\xi_0| < R_0 = \min\left\{|\xi_0|, |\xi_0-\mathbb{1}|\right\}$.

4. Insgesamt ergibt sich daraus für die Funktion $s$ die Darstellung

$$s(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\mathbb{2}}{(\mathbb{1}-\xi_0)^{k+1}} - \frac{\mathbb{2}}{(-\xi_0)^{k+1}} + \frac{k+1}{(\mathbb{1}-\xi_0)^{k+2}} + \frac{k+1}{(-\xi_0)^{k+2}}\right)(\xi-\xi_0)^k$$

für jedes $\xi \in \mathbb{C}$ mit $|\xi-\xi_0| < R_0 = \min\left\{|\xi_0|, |\xi_0-\mathbb{1}|\right\}$. □

**Aufgabe 4.** Seien $\mathbb{E} = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$ und $f_n, g_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch

$$f_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k!} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}, \quad g_n(w) = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{(-1)^{\ell-1}}{\ell} w^\ell \quad \text{für } w \in \mathbb{C} \text{ definiert.}$$

1. Man weise nach, daß die Potenzreihe $(f_n)$ auf $\mathbb{C}$ bzw. $(g_n)$ auf $\mathbb{E}$ jeweils gegen eine analytische Grenzfunktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bzw. $g : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ konvergiert!
2. Man zeige (durch Differentiation), daß es einen Radius $r > 0$ gibt, so daß die Beziehung $g(f(z)) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < r$ gilt!

*Lösung.* 1.1. Wegen $\lim_{k\to\infty} \frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0$ liefert das Quotientenkriterium den Konvergenzradius $r_1 = \infty$ für die Potenzreihe $(f_n)$, welche somit auf $\mathbb{C}$ gegen eine analytische Grenzfunktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ konvergiert und die Ableitung

$$Df(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \mathbb{1} + f(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ besitzt.}$$

1.2. Aufgrund von $\lim_{\ell\to\infty} \frac{\ell}{\ell+1} = 1$ erhält man mit Hilfe des Quotientenkriteriums den Konvergenzradius $r_2 = 1$ für die Potenzreihe $(g_n)$, welche demnach auf $\mathbb{E}$ gegen eine analytische Grenzfunktion $g : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ konvergiert und aufgrund der Summenformel der geometrischen Reihe die Ableitung

$$Dg(w) = \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell-1} w^{\ell-1} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-w)^\ell = \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1} + w} \quad \text{für jedes } w \in \mathbb{E} \text{ hat.}$$

2. Wegen $|f(\mathbb{0})| = 0 < r_2$ gibt es einen Radius $r > 0$ und eine Potenzreihe um $z_0 = \mathbb{0}$, welche auf $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ gegen die Verkettung $g \circ f : U \to \mathbb{C}$ konvergiert, die somit analytisch ist. Mit Hilfe der Kettenregel liefert Schritt 1

$$D(g \circ f)(z) = Dg(f(z))Df(z) = \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1} + f(z)} \cdot (\mathbb{1} + f(z)) = \mathbb{1} \quad \text{für alle } z \in U.$$

Da auch die durch $h(z) = z$ für $z \in \mathbb{C}$ definierte Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Ableitung $Dh(z) = \mathbb{1}$ für $z \in \mathbb{C}$ besitzt, hat die Differenz $s = g \circ f - h : U \to \mathbb{C}$ die Ableitung $Ds(z) = \mathbb{0}$ für alle $z \in U$. Schließlich liefert der Mittelwertsatz

$$0 \le |s(x) - s(\mathbb{0})| \le |x| \sup_{\theta\in[0,1]} |Dh(\theta x)| = 0 \quad \text{für alle } x \in U.$$

Da $g(f(\mathbb{0})) = g(\mathbb{0}) = \mathbb{0} = h(\mathbb{0})$ gilt, folgt $g(f(x)) = h(x) = x$ für alle $x \in U$. □

**Aufgabe 5.** Sei durch $s(x) = (x - \sin x)^2$ für $x \in \mathbb{R}$ eine Funktion $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert. Man entwickle die Funktion $s$ in eine Potenzreihe $(s_n)$ um den Mittelpunkt $x_0 = 0$ und berechne ihre Koeffizienten!

*Lösung.* Mit Hilfe des Additionstheorems $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ werden Umformungen unternommen, die eine Verwendung der Potenzreihen für Sinus und Cosinus um den Mittelpunkt $x_0 = 0$ gestatten: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$s(x) = (x - \sin x)^2 = x^2 - 2x \sin x + \sin^2 x = x^2 - 2x \sin x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x.$$

Die Potenzreihen

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad \text{und} \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

für Sinus und Cosinus liefern somit für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Entwicklung

$$\begin{aligned} s(x) &= x^2 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} 2x^{2k+2} + \frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} 2^{2k-1} x^{2k} \\ &= x^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} 2x^{2k} + \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} 2^{2k-1} x^{2k} \\ &= \left(x^2 - 2x^2 + \frac{x^4}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} \left(2^{2k-1} - 4k\right) x^{2k} \\ &= \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} \left(2^{2k-1} - 4k\right) x^{2k} \end{aligned}$$

der Funktion $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in eine Potenzreihe um den Mittelpunkt $x_0 = 0$. $\square$

**Aufgabe 6.** Der Cosinus $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soll im Punkt $x_0 = 0$ durch eine gebrochene rationale Funktion $f : ]-\delta, \delta[ \to \mathbb{R}$ approximiert werden, welche durch

$$f(x) = \frac{a_0 + a_2 x^2}{b_0 + b_2 x^2} \quad \text{für } x \in ]-\delta, \delta[$$

gegeben wird, wobei $\delta > 0$ so klein sein soll, daß der Nenner von $f$ in $]-\delta, \delta[$ *keine* Nullstellen hat. Wie müssen die reellen Zahlen $a_0$, $a_2$, $b_0$, $b_2 \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit sich die Funktionen $f$ und cos im Punkt $x_0 = 0$ von maximaler Ordnung tangential berühren?

*Lösung.* Es sollen die beiden Fälle $b_2 = 0$ sowie $b_2 \neq 0$ untersucht werden:

1. Im Falle $b_2 = 0$ erhält man offenbar $b_0 \neq 0$, so daß man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen kann, daß $b_0 = 1$ gilt und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Form

$$f(x) = a_0 + a_2 x^2 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

besitzt. Aufgrund der Gestalt

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \tag{5}$$

haben somit $f$ und cos im Punkt $x_0 = 0$ für $a_0 = 1$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $b_0 = 1$, $b_2 = 0$ eine tangentiale Berührung dritter Ordnung.

2. Im Falle $b_2 \neq 0$ folgt $b_0 \neq 0$, da $x_0 = 0$ *keine* Nullstelle des Nenners von $f$ sein soll. Man kann somit ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, daß $b_0 = 1$ gilt, woraus sich mit der geometrischen Summenformel die Darstellung

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{a_0 + a_2 x^2}{b_0 + b_2 x^2} &= \frac{a_2}{b_2} + \left(a_0 - \frac{a_2}{b_2}\right) \frac{1}{1 + b_2 x^2} = \frac{a_2}{b_2} + \left(a_0 - \frac{a_2}{b_2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} (-b_2 x^2)^k \\ &= a_0 - (a_0 b_2 - a_2) x^2 + (a_0 b_2 - a_2) b_2 x^4 + \left(a_0 - \frac{a_2}{b_2}\right) \sum_{k=3}^{\infty} (-b_2 x^2)^k \end{aligned}$$

für alle $x \in ]-\delta, \delta[$ ergibt, wenn man $\delta = \frac{1}{\sqrt{|b_2|}}$ wählt. Aufgrund der Darstellung (5) haben $f$ und cos im Punkt $x_0 = 0$ somit eine tangentiale Berührung von mindestens fünfter Ordnung, wenn die Bedingungen

$$a_0 = 1, \quad a_0 b_2 - a_2 = \frac{1}{2} \quad \text{sowie} \quad (a_0 b_2 - a_2) b_2 = \frac{1}{24}$$

erfüllt sind, was $a_0 = 1$, $a_2 = -\frac{5}{12}$, $b_0 = 1$, $b_2 = \frac{1}{12}$ nach sich zieht und demzufolge

$$f(x) = \frac{1 - \frac{5}{12} x^2}{1 + \frac{1}{12} x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{288} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{6 x^{2k}}{(-12)^k} \quad \text{für } x \in \left]-\sqrt{12}, \sqrt{12}\right[$$

liefert. Vergleicht man mit der Darstellung (5), so haben $f$ und cos im Punkt $x_0 = 0$ für diese Wahl der Parameter eine tangentiale Berührung fünfter Ordnung. □

**Aufgabe 7.** Sei die gebrochene rationale Funktion $s : \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\} \to \mathbb{C}$ durch

$$s(\xi) = \frac{\mathbb{1}}{\xi(\mathbb{1} - \xi)} \quad \text{für } \xi \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\} \text{ definiert.}$$

Man entwickle $s$ um einen beliebig vorgegebenen Mittelpunkt $\xi_0 \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ in eine Potenzreihe $(s_n)$ und berechne deren Koeffizienten sowie Konvergenzradius!

*Lösung.* Um die Summenformel der geometrischen Potenzreihe benutzen zu können, wird die Funktion $s : \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\} \to \mathbb{C}$ einer Teilbruchzerlegung unterworfen:

1. Im Teilbruchansatz

$$\frac{\mathbb{1}}{\xi(\mathbb{1} - \xi)} = \frac{a}{\xi} + \frac{b}{\mathbb{1} - \xi}$$

werden die unbekannten Koeffizienten $a, b \in \mathbb{C}$ bestimmt: Es gilt $a(\mathbb{1} - \xi) + b\xi = \mathbb{1}$ für alle $\xi \in \mathbb{C}$, woraus sich durch Koeffizientenvergleich vor Termen gleicher Ordnung in $\xi$ sogleich $a = \mathbb{1}$ sowie $b - a = \mathbb{0}$, also $b = \mathbb{1}$ ergibt. Daraus folgt die Teilbruchzerlegung

$$s(\xi) = \frac{\mathbb{1}}{\xi(\mathbb{1} - \xi)} = \frac{\mathbb{1}}{\xi} + \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1} - \xi} \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}.$$

Für die Entwicklung von $s$ in eine Potenzreihe um einen beliebig vorgegebenen Punkt $\xi_0 \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ betrachtet man die Darstellung

$$s(\xi) = \frac{\mathbb{1}}{\xi_0} \cdot \frac{\xi_0}{\xi_0 + (\xi - \xi_0)} + \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1} - \xi_0} \cdot \frac{\mathbb{1} - \xi_0}{(\mathbb{1} - \xi_0) - (\xi - \xi_0)} \quad \text{für } \xi \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}.$$

2. Da die geometrische Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)$ für jedes $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 1$ gegen die Summe $\frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1}-x} \in \mathbb{C}$ konvergiert, erhält man für $x = -\frac{\xi-\xi_0}{\xi_0} \in \mathbb{C}$ bzw. $x = \frac{\xi-\xi_0}{\mathbb{1}-\xi_0} \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{\xi - \xi_0}{\xi_0}\right)^k = \frac{\xi_0}{\xi_0 + (\xi - \xi_0)} \qquad \text{für alle } \xi \in \mathbb{C} \text{ mit } |\xi - \xi_0| < |\xi_0|,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\xi - \xi_0}{\mathbb{1} - \xi_0}\right)^k = \frac{\mathbb{1} - \xi_0}{(\mathbb{1} - \xi_0) + (\xi - \xi_0)} \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{C} \text{ mit } |\xi - \xi_0| < |\xi_0 - \mathbb{1}|$$

und schließlich für alle $\xi_0 \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ die Darstellung von $s$ als Potenzreihe

$$\begin{aligned} s(\xi) &= \frac{\mathbb{1}}{\xi_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{\xi - \xi_0}{\xi_0}\right)^k + \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1} - \xi_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\xi - \xi_0}{\mathbb{1} - \xi_0}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mathbb{1}}{(\mathbb{1} - \xi_0)^{k+1}} - \frac{\mathbb{1}}{(-\xi_0)^{k+1}}\right) (\xi - \xi_0)^k \end{aligned}$$

für jedes $\xi \in \mathbb{C}$ mit $|\xi - \xi_0| < R_0 = \min\left\{|\xi_0|, |\xi_0 - \mathbb{1}|\right\}$. □