Übungsaufgaben 8

Elementare Funktionen

Aufgabe 1. Seien $a > 0$, $b > 0$ und $\delta = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$ sowie der positive Ast der *Hyperbel* mit den Brennpunkten $z_+ = (\delta, 0) \in \mathbb{C}$ und $z_- = (-\delta, 0) \in \mathbb{C}$ sowie den Halbachsen a und b durch die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vorgegeben, welche durch

$$f(t) = (a \cosh t, b \sinh t) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

definiert wird. Sei ferner $\tau \in \mathbb{R}$ ein beliebig fixierter Punkt.

1. Man weise nach, daß $|f(\tau) - z_-| - |f(\tau) - z_+| = 2a$ gilt, somit die Kreislinien

$$\{x \in \mathbb{C} \mid |x - z_-| = 2a\} \quad \text{und} \quad \{x \in \mathbb{C} \mid |x - f(\tau)| = |z_+ - f(\tau)|\}$$

genau einen Punkt $x_+ \in \mathbb{C}$ und die Kreislinien

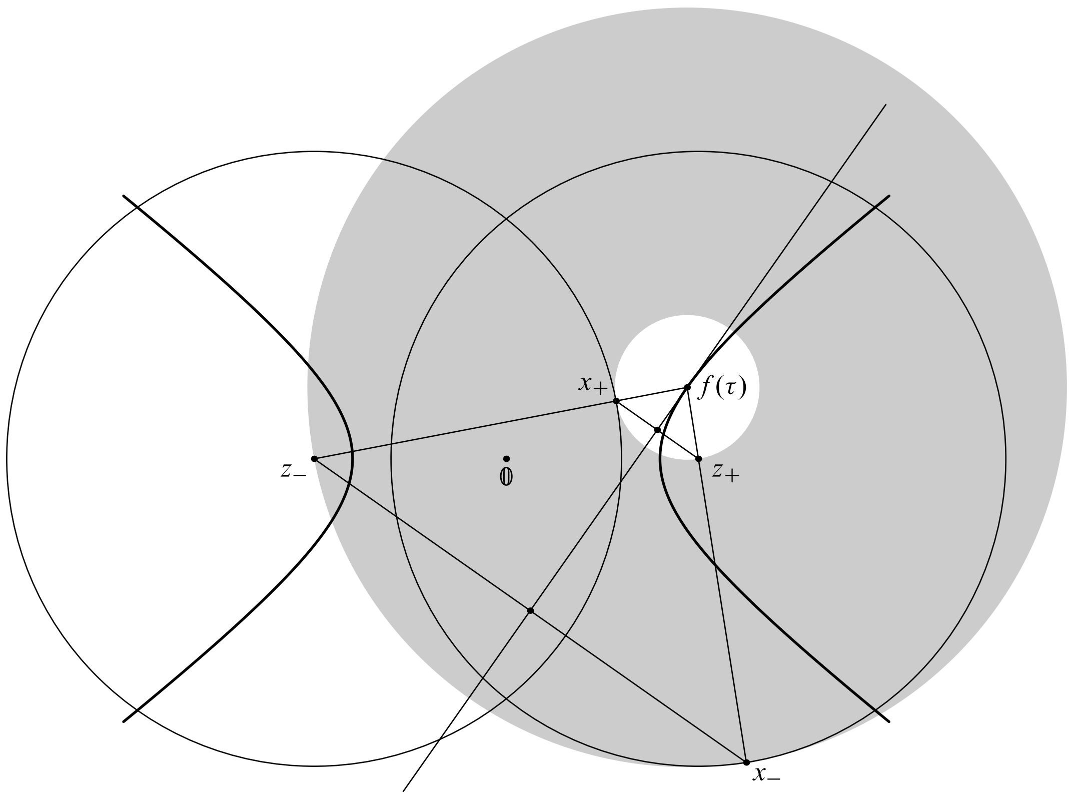
$$\{x \in \mathbb{C} \mid |x - z_+| = 2a\} \quad \text{und} \quad \{x \in \mathbb{C} \mid |x - f(\tau)| = |z_- - f(\tau)|\}$$

genau einen Punkt $x_- \in \mathbb{C}$ gemeinsam haben!

2. Wird die Linearisierung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, welche f in τ tangential berührt, durch

$$g(t) = f(\tau) + Df(\tau)(t - \tau) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

gegeben, so zeige man, daß es Punkte $t_+ \in \mathbb{R}$ und $t_- \in \mathbb{R}$ mit $g(t_+) = \frac{1}{2}(x_+ + z_+)$ und $g(t_-) = \frac{1}{2}(x_- + z_-)$ gibt und außerdem $|g(t_+)| = |g(t_-)| = a$ gilt! ⑧



Lösung. 1.1. Wegen $a^2 = \delta^2 - b^2$ und $\cosh^2\tau - \sinh^2\tau = 1$ gilt für das Quadrat

$$\begin{aligned} |f(\tau) - z_\pm|^2 &= (a\cosh\tau \mp \delta)^2 + (b\sinh\tau)^2 \\ &= a^2\cosh^2\tau \mp 2a\delta\cosh\tau + \delta^2 + b^2\sinh^2\tau \\ &= \delta^2\cosh^2\tau \mp 2a\delta\cosh\tau + (\delta^2 - b^2) = (\delta\cosh\tau \mp a)^2, \end{aligned}$$

woraus sich aufgrund von $0 < a < \delta$ die Beziehungen

$$|f(\tau) - z_+| = \delta\cosh\tau - a \quad \text{und} \quad |f(\tau) - z_-| = \delta\cosh\tau + a$$

und somit $|f(\tau) - z_-| - |f(\tau) - z_+| = 2a$ ergeben.

1.2. Für $x_+ \in \mathbb{C}$ mit $|x_+ - z_-| = 2a$ und $|f(\tau) - x_+| = |f(\tau) - z_+|$ gilt demnach

$$|f(\tau) - z_-| = |f(\tau) - z_+| + 2a = |f(\tau) - x_+| + |x_+ - z_-|.$$

Die Punkte $z_-, x_+, f(\tau)$ liegen somit auf einer Strecke. Es gibt daher einen Parameter $\lambda_+ \in \,]0,1[$, so daß die Darstellung $x_+ = \lambda_+ f(\tau) + (1 - \lambda_+)z_-$ gilt. Daraus folgt

$$2a = |x_+ - z_-| = \lambda_+|f(\tau) - z_-| = \lambda_+(\delta\cosh\tau + a) \;\text{ und }\; \lambda_+ = \frac{2a}{\delta\cosh\tau + a}.$$

1.3. Für $x_- \in \mathbb{C}$ mit $|x_- - z_+| = 2a$ und $|f(\tau) - x_-| = |f(\tau) - z_-|$ gilt genauso

$$|f(\tau) - x_-| = |f(\tau) - z_-| = |f(\tau) - z_+| + 2a = |f(\tau) - z_+| + |z_+ - x_-|.$$

Die Punkte $x_-, z_+, f(\tau)$ liegen daher auf einer Strecke. Es gibt somit einen Parameter $\lambda_- < 0$, so daß die Darstellung $x_- = \lambda_- f(\tau) + (1 - \lambda_-)z_+$ gilt. Daraus folgt

$$2a = |x_- - z_+| = -\lambda_-|f(\tau) - z_+| = -\lambda_-(\delta\cosh\tau - a) \;\text{ und }\; \lambda_- = -\frac{2a}{\delta\cosh\tau - a}.$$

2.1. Wegen $z_+ + z_- = \mathbb{0}$ ergibt sich demnach für die Streckenmittelpunkte

$$\frac{x_\pm + z_\pm}{2} = \frac{x_\pm - z_\mp}{2} \quad \text{und somit} \quad \left|\frac{x_\pm + z_\pm}{2}\right| = \frac{2a}{2} = a.$$

2.2. Die Linearisierung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, welche f in τ tangential berührt, wird durch

$$g(t) = (a\cosh\tau, b\sinh\tau) + (t - \tau)(a\sinh\tau, b\cosh\tau) \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \text{ gegeben.}$$

Um jeweils eine Lösung $t_\pm \in \mathbb{R}$ der linearen Gleichung $g(t_\pm) = \frac{1}{2}(x_\pm + z_\pm)$ zu finden, untersucht man Real- und Imaginärteil

$$\begin{aligned} (t_\pm - \tau)\, a\sinh\tau &= \frac{\pm a(a\cosh\tau \pm \delta)}{\delta\cosh\tau \pm a} - a\cosh\tau = -\frac{\delta a\sinh^2\tau}{\delta\cosh\tau \pm a} \\ (t_\pm - \tau)\, b\cosh\tau &= \frac{\pm ab\sinh\tau}{\delta\cosh\tau \pm a} - b\sinh\tau = -\frac{\delta b\sinh\tau\cosh\tau}{\delta\cosh\tau \pm a}. \end{aligned}$$

Somit erfüllt der durch

$$t_\pm - \tau = -\frac{\delta\sinh\tau}{\delta\cosh\tau \pm a}$$

gegebene Punkt $t_\pm \in \mathbb{R}$ jeweils die Gleichung $g(t_\pm) = \frac{1}{2}(x_\pm + z_\pm)$. □

Aufgabe 2. Man beweise, daß die elementaren Grenzwertbeziehungen

$$\lim_{\xi\to\infty}\frac{\ln(\xi)}{\xi^x}=0 \quad\text{und}\quad \lim_{\xi\to 0}\frac{x^\xi-1}{\xi}=\ln(x) \quad \text{für jedes } x\in\mathbb{R} \text{ mit } x>0$$

sowie

$$\lim_{\xi\to\infty}\frac{\xi^x}{\exp(\xi)}=0 \quad\text{und}\quad \lim_{\xi\to 0}(1+\xi)^{x/\xi}=\exp(x) \quad \text{für jedes } x\in\mathbb{R}$$

gelten! ⑥

Lösung. 1. Da die Exponentialreihe für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $y > 0$ stets

$$\exp(xy)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(xy)^k}{k!}\geq 1+xy+\frac{(xy)^2}{2}$$

liefert, folgt aus $\lim_{\xi\to\infty}\ln(\xi)=\infty$ und der Stetigkeit des Logarithmus in der Tat

$$0\leq\lim_{\xi\to\infty}\frac{\ln(\xi)}{\xi^x}=\lim_{\xi\to\infty}\frac{\ln(\xi)}{\exp(x\ln(\xi))}=\lim_{y\to\infty}\frac{y}{\exp(xy)}\leq\lim_{y\to\infty}\frac{y}{1+xy+\frac{1}{2}(xy)^2}=0.$$

2. Sei $x\in\mathbb{R}$ mit $x>0$ gegeben. Da die durch $g(\xi)=x^\xi=\exp(\xi\ln(x))$ für $\xi\in\mathbb{R}$ definierte Funktion $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ differenzierbar ist und die Ableitung

$$Dg(\xi)=\exp(\xi\ln(x))\ln(x)=x^\xi\ln(x) \quad \text{für } \xi\in\mathbb{R}$$

besitzt, erhält man

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{x^\xi-1}{\xi}=\lim_{\xi\to 0}\frac{g(\xi)-g(0)}{\xi-0}=Dg(0)=\ln(x).$$

3. Da wegen $\lim_{\xi\to\infty}\frac{\ln(\xi)}{\xi}=0$ für jedes beliebig vorgegebene $x\in\mathbb{R}$ die Beziehung

$$\lim_{\xi\to\infty}\xi\left(\frac{x\ln(\xi)}{\xi}-1\right)=-\infty \quad \text{gilt, folgt} \quad \lim_{\xi\to\infty}\frac{\xi^x}{\exp(\xi)}=\lim_{\xi\to\infty}\exp(x\ln(\xi)-\xi)=0$$

aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion.

4. Da die durch die Vorschrift $f(\xi)=\ln(1+\xi)$ für $\xi\in\,]-1,\infty[$ definierte Funktion $f:\,]-1,\infty[\,\to\mathbb{R}$ differenzierbar ist und die Ableitung

$$Df(\xi)=\frac{1}{1+\xi} \quad \text{für } \xi\in\,]-1,\infty[$$

besitzt, ergibt sich

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{\ln(1+\xi)}{\xi}=\lim_{\xi\to 0}\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=Df(0)=1$$

und somit

$$\lim_{\xi\to 0}(1+\xi)^{x/\xi}=\lim_{\xi\to 0}\exp\left(\frac{x\ln(1+\xi)}{\xi}\right)=\exp(x) \quad \text{für alle } x\in\mathbb{R}$$

aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion. □

Aufgabe 3. *Zeitlich veränderliche Schwingungen* mit anschwellender bzw. gedämpfter Amplitude können durch Funktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschrieben werden, die mit Hilfe einer vorgegebenen *Dämpfung* $a \in \mathbb{R}$ und *Frequenz* $b \in \mathbb{R}$ durch

$$u(t) = \mathrm{e}^{at} \sin bt \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \text{ definiert werden.}$$

Seien dabei $r \in [0, \infty[$, $\beta \in \mathbb{R}$ Polarkoordinaten von $(a, b) = (r \cos\beta, r \sin\beta) \in \mathbb{C}$.

1. Man beweise (induktiv), daß die Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Ableitungen

$$D^k u(t) = r^k \mathrm{e}^{at} \sin(bt + k\beta) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ besitzt!}$$

2. Man weise nach, daß die Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Differentialgleichung

$$D^2 u(t) - 2a Du(t) + r^2 u(t) = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ erfüllt!}$$

3. Man zeige durch Restabschätzung, daß die Taylor-Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (rt)^k \sin k\beta\right)$ um den Entwicklungspunkt $t_0 = 0$ in jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$ gegen $u(t)$ konvergiert! ⑥

Lösung. 1. Der Nachweis erfolgt induktiv über die Ableitungsordnung $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

Induktionsanfang: Offenbar gilt $D^k u(t) = u(t) = \mathrm{e}^{at} \sin bt$ für $k = 0$ und $t \in \mathbb{R}$.

Induktionsschritt: Unter der Annahme, daß die Induktionsvoraussetzung für ein $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ erfüllt ist, soll die entsprechende Aussage für $k + 1$ bewiesen werden: Aufgrund der Darstellung $(a, b) = (r \cos\beta, r \sin\beta)$ und der Additionstheoreme gilt

$$\begin{aligned} D^{k+1} u(t) &= DD^k u(t) = r^k a \mathrm{e}^{at} \sin(bt + k\beta) + r^k b \mathrm{e}^{at} \cos(bt + k\beta) \\ &= r^{k+1} \mathrm{e}^{at} \big(\sin(bt + k\beta) \cos\beta + \sin\beta \cos(bt + k\beta)\big) \\ &= r^{k+1} \mathrm{e}^{at} \sin(bt + (k+1)\beta) \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, woraus sich die Induktionsbehauptung ergibt.

2. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt wegen $r^2 = a^2 + b^2$ in der Tat die Beziehung

$$\begin{aligned} D^2 u(t) - 2a Du(t) + r^2 u(t) = {} & \big((a^2 - b^2)\, \mathrm{e}^{at} \sin bt + 2ab \mathrm{e}^{at} \cos bt\big) \\ & - 2a\big(a \mathrm{e}^{at} \sin bt + b \mathrm{e}^{at} \cos bt\big) \\ & + (a^2 + b^2)\, \mathrm{e}^{at} \sin bt = 0. \end{aligned}$$

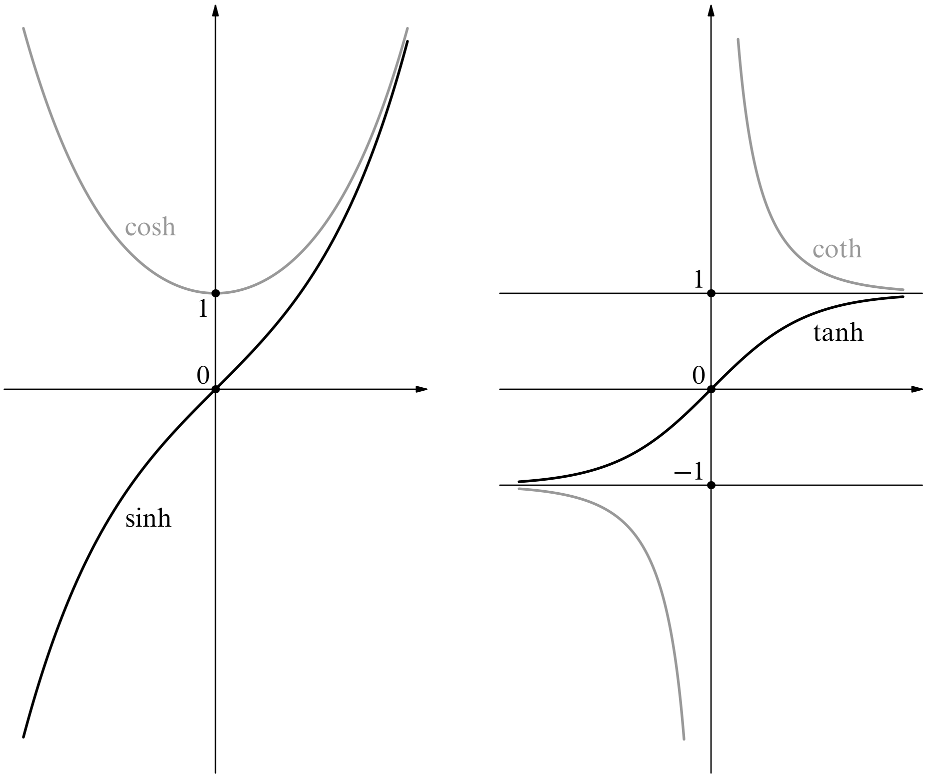
3. Aufgrund der Monotonie der Exponentialfunktion erhält man nach Schritt 1

$$\sup_{|\theta| \le |t|} |D^{n+1} u(\theta)| \le \sup_{|\theta| \le |t|} r^{n+1} \mathrm{e}^{a\theta} \le r^{n+1} \mathrm{e}^{|at|}$$

für jedes $t \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ und somit die Restabschätzung

$$\left| u(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin k\beta}{k!} (rt)^k \right| \le \frac{|t|^{n+1}}{n!} \sup_{|\theta| \le |t|} |D^{n+1} u(\theta)| \le \frac{|rt|^{n+1}}{n!} \mathrm{e}^{|at|}$$

für die Taylor-Reihe von u um $t_0 = 0$ in $t \in \mathbb{R}$, woraus $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (rt)^k \sin k\beta = u(t)$ wegen $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n!} |rt|^{n+1} \mathrm{e}^{|at|} = 0$ folgt. □



Aufgabe 4. 1. Man weise nach, daß die durch

$$\sinh x = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \quad \text{und} \quad \cosh x = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

definierten *hyperbolischen Funktionen* sinh, cosh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind und die Ableitungen

$$D\sinh(x) = \cosh x \quad \text{bzw.} \quad D\cosh(x) = \sinh x \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ besitzen!}$$

2. Man zeige, daß die *hyperbolischen Funktionen* $\tanh = \frac{\sinh}{\cosh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sowie $\coth = \frac{\cosh}{\sinh} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind und die folgenden Ableitungen haben:

$$D\tanh(x) = 1 - \tanh^2 x \ \text{ für } x \in \mathbb{R}, \qquad D\coth(x) = 1 - \coth^2 x \ \text{ für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Lösung. Da $D\exp(x) = \exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, erhält man

$$\begin{aligned}
D\sinh(x) &= \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} = \cosh x && \text{für alle } x \in \mathbb{R},\\
D\cosh(x) &= \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} = \sinh x && \text{für alle } x \in \mathbb{R},\\
D\tanh(x) &= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x && \text{für alle } x \in \mathbb{R},\\
D\coth(x) &= \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x && \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}
\end{aligned}$$

aufgrund der Ketten- und Quotientenregel. □

Aufgabe 5. Man zeige, daß die inverse Funktion $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sowie die inverse Funktion $\operatorname{arcosh} : [1, \infty[\to [0, \infty[$ von $\cosh : [0, \infty[\to [1, \infty[$ jeweils in den inneren Punkten ihres Definitionsbereichs differenzierbar ist und die Ableitung

$$D \operatorname{arsinh}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \quad \text{für } \xi \in \mathbb{R}, \qquad D \operatorname{arcosh}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \quad \text{für } \xi \in \,]1, \infty[\text{ hat!}$$

Lösung. 1. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ folgen aus

$$\begin{aligned} \exp(\pm(x+y)) &= \exp(\pm x) \exp(\pm y) = (\cosh x \pm \sinh x)(\cosh y \pm \sinh y) \\ &= (\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y) \pm (\sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x) \end{aligned}$$

durch Addition bzw. Subtraktion die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \cosh(x \pm y) &= \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y, \\ \sinh(x \pm y) &= \sinh x \cosh y \pm \sinh y \cosh x \end{aligned}$$

und somit $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \cosh(x - x) = \cosh 0 = 1$.

2. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2} \in \mathbb{R}$ und das Additionstheorem

$$\sinh x - \sinh y = 2 \cosh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}.$$

Im Falle $\sinh x - \sinh y = 0$ folgt wegen $\cosh \frac{x+y}{2} \geq 1$ stets $\sinh \frac{x-y}{2} = 0$ und somit $\exp(x - y) = 1$, also $x = y$ und damit die Injektivität von $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Somit überträgt sich die Stetigkeit dieser Funktion auf ihre Inverse $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Da $D \sinh(x) = \cosh x \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ergibt sich demnach die Differenzierbarkeit von arsinh in $\mathbb{R}$ sowie

$$D \operatorname{arsinh}(\xi) = \frac{1}{D \sinh(x)} = \frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}$$

für alle $\xi = \sinh x \in \mathbb{R}$ mit $x \in \mathbb{R}$.

3. Für alle $x, y \in [0, \infty[$ gilt $\frac{x+y}{2} \in [0, \infty[$, $\frac{x-y}{2} \in \mathbb{R}$ sowie das Additionstheorem

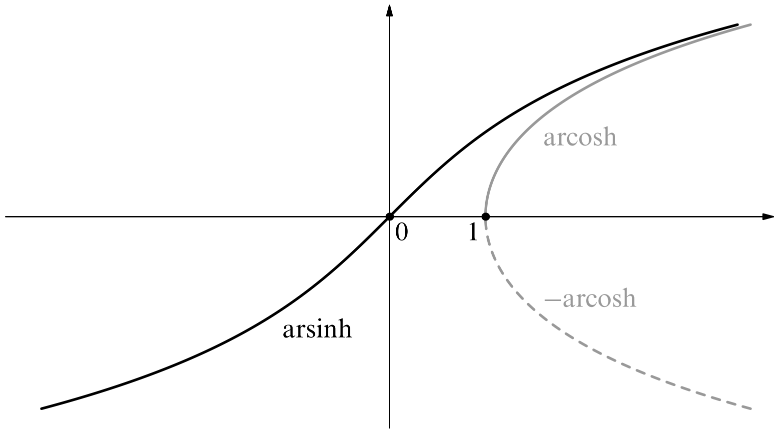
$$\cosh x - \cosh y = 2 \sinh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}.$$

Im Falle $\cosh x - \cosh y = 0$ folgt daraus $\sinh \frac{x+y}{2} = 0$ oder $\sinh \frac{x-y}{2} = 0$ und somit $x = y$, also die Injektivität von $\cosh : [0, \infty[\to [1, \infty[$. Somit überträgt sich die Stetigkeit dieser Funktion auf ihre Inverse $\operatorname{arcosh} : [1, \infty[\to [0, \infty[$.

Da $D \cosh(x) = \sinh x > 0$ für alle $x \in \,]0, \infty[$ gilt, erhält man die Differenzierbarkeit von arcosh in $]1, \infty[$ sowie

$$D \operatorname{arcosh}(\xi) = \frac{1}{D \cosh(x)} = \frac{1}{\sinh x} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}}$$

für alle $\xi = \cosh x \in \,]1, \infty[$ mit $x \in \,]0, \infty[$. $\square$



Aufgabe 6. Man zeige, daß die Inverse $\operatorname{artanh} :]-1,1[\to \mathbb{R}$ von $\tanh : \mathbb{R} \to]-1,1[$ bzw. die Inverse $\operatorname{arcoth} : \mathbb{R} \setminus [-1,1] \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ von $\coth : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus [-1,1]$ jeweils differenzierbar ist und folgende Ableitung besitzt

$$D \operatorname{artanh}(\xi) = \frac{1}{1-\xi^2} \quad \text{für } \xi \in]-1,1[, \qquad D \operatorname{arcoth}(\xi) = \frac{1}{1-\xi^2} \quad \text{für } \xi \in \mathbb{R} \setminus [-1,1].$$

Lösung. 1. Es gilt das Additionstheorem

$$\tanh x - \tanh y = \frac{\sinh x}{\cosh y} - \frac{\sinh x}{\cosh y} = \frac{\sinh(x-y)}{\cosh x \cosh y} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Im Falle $\tanh x - \tanh y = 0$ folgt daraus $\sinh(x-y) = 0$ und somit $x = y$, also die Injektivität von $\tanh : \mathbb{R} \to]-1,1[$. Somit überträgt sich die Stetigkeit dieser Funktion auf ihre Inverse $\operatorname{artanh} :]-1,1[\to \mathbb{R}$.

Wegen $D \tanh x = 1 - \tanh^2 x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ergibt sich somit die Differenzierbarkeit von artanh in $]-1,1[$ sowie

$$D \operatorname{artanh}(\xi) = \frac{1}{D \tanh(x)} = \frac{1}{1 - \tanh^2 x} = \frac{1}{1-\xi^2}$$

für alle $\xi = \tanh x \in]-1,1[$ mit $x \in \mathbb{R}$.

2. Es gilt das das Additionstheorem

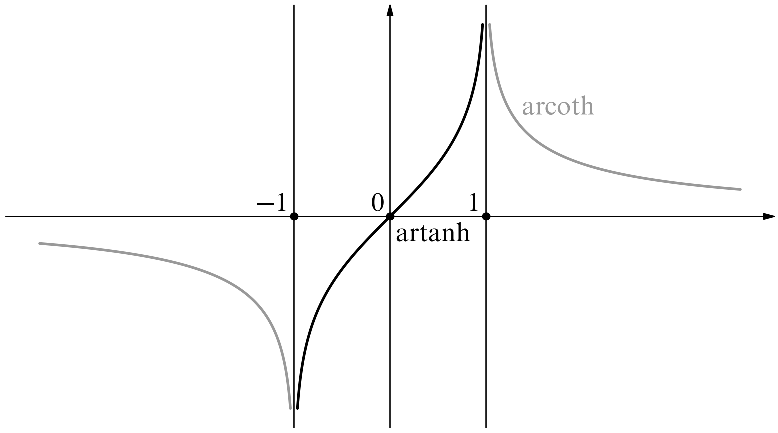
$$\coth x - \coth y = \frac{\cosh x}{\sinh x} - \frac{\cosh y}{\sinh y} = -\frac{\sinh(x-y)}{\sinh x \sinh y} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Im Falle $\coth x - \coth y = 0$ folgt daraus $\sinh(x-y) = 0$ und somit $x = y$, also die Injektivität von $\coth : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus [-1,1]$. Damit überträgt sich die Stetigkeit dieser Funktion auf ihre Inverse $\operatorname{arcoth} : \mathbb{R} \setminus [-1,1] \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Da $D \coth(x) = 1 - \coth^2 x < 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt, erhält man die Differenzierbarkeit von arcoth in $\mathbb{R} \setminus [-1,1]$ sowie

$$D \operatorname{arcoth}(\xi) = \frac{1}{D \coth x} = \frac{1}{1 - \coth^2 x} = \frac{1}{1-\xi^2}$$

für alle $\xi = \coth x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$ mit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\square$



Aufgabe 7. Man leite die logarithmischen Darstellungen für die *Areafunktionen* her:

1. Es gilt $\operatorname{arsinh}\xi = \ln\left(\xi + \sqrt{1+\xi^2}\right)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$.
2. Für alle $\xi \in [1, \infty[$ gilt $\operatorname{arcosh}\xi = \ln\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$.
3. Es gilt $\operatorname{artanh}\xi = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$, $|\xi| < 1$.
4. Für alle $\xi \in \mathbb{R}$, $|\xi| > 1$ gilt $\operatorname{arcoth}\xi = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\xi+1}{\xi-1}\right)$.

Lösung. 1. Wird $\xi \in \mathbb{R}$ vorgegeben und $x \in \mathbb{R}$ mit $\xi = \sinh x$ gewählt, dann gilt

$$\xi + \sqrt{1+\xi^2} = \sinh x + \sqrt{1 + \sinh^2 x} = \sinh x + \cosh x = \exp(x)$$

und somit $\operatorname{arsinh}\xi = x = \ln\left(\xi + \sqrt{1+\xi^2}\right)$.

2. Wird $\xi \in [1, \infty[$ vorgegeben und $x \in [0, \infty[$ mit $\xi = \cosh x$ gewählt, so gilt

$$\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} = \cosh x + \sqrt{\cosh^2 x - 1} = \cosh x + \sinh x = \exp(x)$$

und damit $\operatorname{arcosh}\xi = x = \ln\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$.

3. Wird $\xi \in \mathbb{R}$, $|\xi| < 1$ vorgegeben und $x \in \mathbb{R}$ mit $\xi = \tanh x$ gewählt, dann gilt

$$\frac{1+\xi}{1-\xi} = \frac{1+\tanh x}{1-\tanh x} = \frac{\cosh x + \sinh x}{\cosh x - \sinh x} = \frac{\exp(x)}{\exp(-x)} = \exp(2x),$$

woraus $\operatorname{artanh}\xi = x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)$ folgt.

4. Wird $\xi \in \mathbb{R}$, $|\xi| > 1$ vorgegeben und $x \in \mathbb{R}$ mit $\xi = \coth x$ gewählt, so gilt

$$\frac{\xi+1}{\xi-1} = \frac{\coth x + 1}{\coth x - 1} = \frac{\cosh x + \sinh x}{\cosh x - \sinh x} = \frac{\exp(x)}{\exp(-x)} = \exp(2x),$$

woraus $\operatorname{arcoth}\xi = x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\xi+1}{\xi-1}\right)$ folgt. □

Aufgabe 8. Seien $\delta > 0$ und die *Parabel* mit dem Brennpunkt $z = (0, 2\delta) \in \mathbb{C}$ und der Leitgerade $G = \{(\xi, 0) \in \mathbb{C} \mid \xi \in \mathbb{R}\}$ durch die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vorgegeben, welche durch

$$f(t) = \big(2\delta \sinh t, \delta \cosh^2 t\big) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

definiert wird. Sei ferner $\tau \in \mathbb{R}$ ein beliebig fixierter Punkt.

1. Man weise nach, daß die Leitgerade G und die Kreislinie

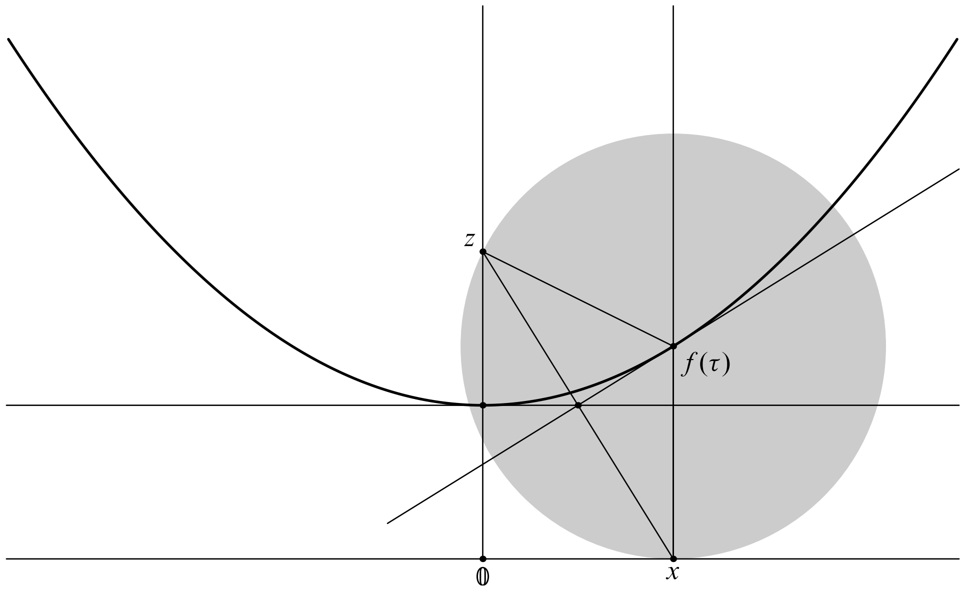
$$\big\{x \in \mathbb{C} \mid |x - f(\tau)| = |z - f(\tau)|\big\}$$

genau einen Punkt $x \in \mathbb{C}$ gemeinsam haben!

2. Werden die Linearisierungen $g_\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und $g_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, welche f in τ bzw. 0 tangential berühren, durch

$$g_\tau(t) = f(\tau) + Df(\tau)(t - \tau) \quad \text{und} \quad g_0(t) = f(0) + Df(0)\, t \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

gegeben, so zeige man, daß es Punkte $t \in \mathbb{R}$ und $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $g_\tau(t) = \frac{1}{2}(x + z)$ und $g_0(t_0) = \frac{1}{2}(x + z)$ gibt!



Lösung. 1. Wegen $\cosh^2\tau - \sinh^2\tau = 1$ gilt

$$\begin{aligned}|f(\tau) - z|^2 &= (2\delta\sinh\tau)^2 + (\delta\cosh^2\tau - 2\delta)^2\\ &= 4\delta^2\sinh^2\tau + \delta^2\cosh^4\tau - 4\delta^2\cosh^2\tau + 4\delta^2 = (\delta\cosh^2\tau)^2\end{aligned}$$

und somit genau dann für einen Punkt $x = (\xi, 0) \in G$ die Beziehung

$$|f(\tau) - x|^2 = (2\delta\sinh\tau - \xi)^2 + (\delta\cosh^2\tau)^2 = (\delta\cosh^2\tau)^2 = |f(\tau) - z|^2,$$

wenn $\xi = 2\delta\sinh\tau$ ist. Daraus ergibt sich

$$x = (2\delta\sinh\tau, 0) \in \mathbb{C} \quad \text{sowie} \quad \frac{x+z}{2} = (\delta\sinh\tau, \delta) \in \mathbb{C}.$$

2.1. Die Linearisierung $g_\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, welche f in τ tangential berührt, wird durch

$$g_\tau(t) = (2\delta\sinh\tau, \delta\cosh^2\tau) + (t - \tau)(2\delta\cosh\tau, 2\delta\sinh\tau\cosh\tau) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

gegeben. Für jede Lösung $t \in \mathbb{R}$ der linearen Gleichung $g_\tau(t) = \frac{1}{2}(x + z)$ gilt

$$\begin{aligned}2(t - \tau)\cosh\tau \cdot (\delta, \delta\sinh\tau) &= (\delta\sinh\tau, \delta) - (2\delta\sinh\tau, \delta\cosh^2\tau)\\ &= -(\delta\sinh\tau, \delta\sinh^2\tau) = -\sinh\tau \cdot (\delta, \delta\sinh\tau).\end{aligned}$$

Somit gilt $g_\tau(t) = \frac{1}{2}(x + z)$ für den durch

$$t - \tau = -\frac{\sinh\tau}{2\cosh\tau}$$

gegebenen Punkt $t \in \mathbb{R}$.

2.2. Die Linearisierung $g_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die f in 0 tangential berührt, wird durch

$$g_0(t) = (0, \delta) + t(2\delta, 0) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

gegeben. Für jede Lösung $t_0 \in \mathbb{R}$ der linearen Gleichung $g_0(t_0) = \frac{1}{2}(x + z)$ gilt

$$2t_0(\delta, 0) = (\delta\sinh\tau, \delta) - (0, \delta) = \sinh\tau \cdot (\delta, 0)$$

Somit ist der Punkt

$$t_0 = \frac{\sinh\tau}{2} \in \mathbb{R}$$

die Lösung der Gleichung $g_0(t_0) = \frac{1}{2}(x + z)$. □

Aufgabe 9. Man zeige durch Differentiation, daß die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}\right)$ für jedes $x \in \,]-1, 1[$ gegen den Grenzwert $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \in \mathbb{R}$ konvergiert!

Lösung. 1. Die gegebene Potenzreihe (s_n) um $x_0 = 0$ mit den durch $a_{2k+1} = \frac{1}{2k+1}$ und $a_{2k} = 0$ für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definierten Koeffizienten (a_k) hat wegen der Beziehung

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} = 1$$

den Konvergenzradius $R = 1$ und konvergiert somit in $]-1, 1[$ gegen eine differenzierbare Grenzfunktion $s : \,]-1, 1[\,\to \mathbb{R}$.

2. Die summandenweise differenzierte Potenzreihe (Ds_n) um $x_0 = 0$ mit den Koeffizienten $((k + 1)a_{k+1})$ hat ebenfalls den Konvergenzradius $R = 1$ und konvergiert in $]-1, 1[$ gegen die Ableitung $Ds : \,]-1, 1[\,\to \mathbb{R}$ der Grenzfunktion $s : \,]-1, 1[\,\to \mathbb{R}$. Es gilt somit

$$Ds(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| < 1$$

aufgrund der Summenformel der geometrischen Reihe.

3. Die durch

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{2} \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\ |x| < 1$$

definierte Funktion $f : \,]-1, 1[\,\to \mathbb{R}$ hat ebenfalls die Ableitung

$$Df(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},\ |x| < 1.$$

Aufgrund von Schritt 2 hat die Funktion $h = s - f$ für jedes $z \in \,]-1, 1[$ die Ableitung $Dh(z) = 0$. Der Mittelwertsatz liefert somit die Abschätzung

$$|h(x) - h(0)| \le |x| \sup_{\theta\in[0,1]} |Dh(\theta x)| = 0 \quad \text{für alle } x \in \,]-1, 1[,$$

also $h(x) = h(0)$ für alle $x \in \,]-1, 1[$. Da $f(0) = 0$ sowie $s(0) = s_n(0) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt, ergibt sich schließlich $s(x) = f(x)$ für alle $x \in \,]-1, 1[$. □

Aufgabe 10. Man bestimme die Menge aller Lösungen $x \in \mathbb{C}$, welche die Gleichung $\operatorname{Exp}(2x) - (2,3) \cdot \operatorname{Exp}(x) = (0,-6)$ erfüllen!

Lösung. 1.1. Zunächst werden die komplexen Lösungen der quadratischen Gleichung $u^2 - (2,3) \cdot u = (0,-6)$ berechnet. Durch quadratische Ergänzung der linken Seite ergibt sich für die neue Unbekannte $z = u - \frac{1}{2}(2,3) \in \mathbb{C}$ die Gleichung

$$z^2 = \big(u - \tfrac{1}{2}(2,3)\big)^2 = (0,-6) + \tfrac{1}{4}(2,3)^2 = (0,-6) + \big(-\tfrac{5}{4}, 3\big) = \big(-\tfrac{5}{4}, -3\big)\,.$$

1.2. Stellt man die rechte Seite $w = (r\cos\alpha, r\sin\alpha) = \big(-\frac{5}{4}, -3\big)$ in Polarkoordinaten $r = |w| = \frac{13}{4}$ und $\alpha \in [\pi, 2\pi]$ dar, dann sind

$$z_0 = \sqrt{r}\,\big(\cos\tfrac{\alpha}{2}, \sin\tfrac{\alpha}{2}\big) \in \mathbb{C} \text{ und } z_1 = \sqrt{r}\,\big(\cos(\pi + \tfrac{\alpha}{2}), \sin(\pi + \tfrac{\alpha}{2})\big) = -z_0 \in \mathbb{C}$$

die beiden Lösungen der Gleichung $z^2 = w$. Der Punkt $\big(\cos\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\alpha}{2}\big)$ kann wegen der Lage des Winkels $\frac{\alpha}{2} \in \big[\frac{\pi}{2}, \pi\big]$ eindeutig aus $(\cos\alpha, \sin\alpha) = \big(-\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\big)$ mit Hilfe der Beziehungen $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$ und $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ bestimmt werden:

Aus $2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = \cos\alpha = -\frac{5}{13}$ folgt sofort $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{13}$ und somit $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{2}{\sqrt{13}}$ wegen $\frac{\alpha}{2} \in \big[\frac{\pi}{2}, \pi\big]$. Somit ergibt sich aus $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha = -\frac{12}{13}$ schließlich auch noch $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{\sqrt{13}}$, das heißt, die Gleichung $z^2 = w$ hat die beiden Lösungen

$$z_0 = \tfrac{\sqrt{13}}{2}\,\tfrac{1}{\sqrt{13}}\,(-2,3) = \tfrac{1}{2}(-2,3) \in \mathbb{C} \text{ und } z_1 = -z_0 = \tfrac{1}{2}(2,-3) \in \mathbb{C}.$$

1.3. Somit besitzt die quadratische Gleichung $u^2 - (2,3)\cdot u = (0,-6)$ die Lösungen

$$u_0 = \tfrac{1}{2}(2,3) + z_0 = \tfrac{1}{2}(2,3) + \tfrac{1}{2}(-2,3) = (0,3) \in \mathbb{C},$$
$$u_1 = \tfrac{1}{2}(2,3) + z_1 = \tfrac{1}{2}(2,3) + \tfrac{1}{2}(2,-3) = (2,0) \in \mathbb{C}.$$

2. Alle Lösungen $x_k, y_k \in \mathbb{C}$ der Gleichungen $\operatorname{Exp}(x) = u_0$ bzw. $\operatorname{Exp}(y) = u_1$ und somit der Gleichung $\operatorname{Exp}(2x) - (2,3) \cdot \operatorname{Exp}(x) = (0,-6)$ ergeben sich jeweils aus der Darstellung

$$u_0 = (r_0\cos\beta_0, r_0\sin\beta_0) = (0,3),$$
$$u_1 = (r_1\cos\beta_1, r_1\sin\beta_1) = (2,0),$$

in Polarkoordinaten $r_0 = 3$, $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$ bzw. $r_1 = 2$, $\beta_1 = 0$ in der Gestalt

$$x_k = (\ln r_0, \beta_0 + 2k\pi) = \big(\ln 3, \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\big) \in \mathbb{C},$$
$$y_k = (\ln r_1, \beta_1 + 2k\pi) = \big(\ln 2, 2k\pi\big) \in \mathbb{C}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

Aufgabe 11. Seien $c, s : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytische Funktionen mit $c(\mathbb{0}) = \mathbb{1}$, $Dc(\mathbb{0}) = \mathbb{0}$ und $s(\mathbb{0}) = \mathbb{0}$, $Ds(\mathbb{0}) = z \in \mathbb{C}$. Man zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

1. Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gelten die Additionstheoreme

$$c(x + y) = c(x)c(y) - s(x)s(y),$$
$$s(x + y) = s(x)c(y) + s(y)c(x).$$

2. Für alle $x \in \mathbb{C}$ gelten die Gleichungen $Dc(x) = -zs(x)$ und $Ds(x) = zc(x)$.
3. Es gilt $c(x) = \mathrm{Cos}(zx)$ und $s(x) = \mathrm{Sin}(zx)$ für alle $x \in \mathbb{C}$.

Lösung. 1. Unter der Annahme, daß die beiden Additionstheoreme gelten, differenziert man beide Seiten dieser Identitäten nach y und erhält für alle $x, y \in \mathbb{C}$

$$Dc(x + y) = c(x)Dc(y) - s(x)Ds(y),$$
$$Ds(x + y) = s(x)Dc(y) + c(x)Ds(y).$$

Setzt man $y = \mathbb{0}$, so folgen aus $Dc(\mathbb{0}) = \mathbb{0}$ und $Ds(\mathbb{0}) = z$ die Differentialgleichungen $Dc(x) = -zs(x)$ und $Ds(x) = zc(x)$ für alle $x \in \mathbb{C}$.

2. Seien die Differentialgleichungen $Dc(x) = -zs(x)$ und $Ds(x) = zc(x)$ für alle $x \in \mathbb{C}$ erfüllt. Definiert man die analytischen Funktionen $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$f(x) = \mathrm{Exp}(-\mathbb{i}xz)\big(c(x) + \mathbb{i}s(x)\big) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{C},$$
$$g(x) = \mathrm{Exp}(\mathbb{i}xz)\big(c(x) - \mathbb{i}s(x)\big) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{C},$$

dann erhalt man durch Differentiation für alle $x \in \mathbb{C}$ die Beziehungen

$$Df(x) = -\mathbb{i}z\,\mathrm{Exp}(-\mathbb{i}xz)\big(c(x) + \mathbb{i}s(x)\big) + \mathrm{Exp}(-\mathbb{i}xz)\big(Dc(x) + \mathbb{i}\,Ds(x)\big) = \mathbb{0},$$
$$Dg(x) = \mathbb{i}z\,\mathrm{Exp}(\mathbb{i}xz)\big(c(x) - \mathbb{i}s(x)\big) + \mathrm{Exp}(\mathbb{i}xz)\big(Dc(x) - \mathbb{i}\,Ds(x)\big) = \mathbb{0}.$$

Wegen $c(\mathbb{0}) = \mathbb{1}$ und $s(\mathbb{0}) = \mathbb{0}$ liefert der Mittelwertsatz

$$f(x) = f(\mathbb{0}) = c(\mathbb{0}) + \mathbb{i}s(\mathbb{0}) = \mathbb{1},$$
$$g(x) = g(\mathbb{0}) = c(\mathbb{0}) - \mathbb{i}s(\mathbb{0}) = \mathbb{1}$$

für alle $x \in \mathbb{C}$ und somit

$$c(x) + \mathbb{i}s(x) = f(x)\,\mathrm{Exp}(\mathbb{i}xz) = \mathrm{Exp}(\mathbb{i}xz),$$
$$c(x) - \mathbb{i}s(x) = g(x)\,\mathrm{Exp}(-\mathbb{i}xz) = \mathrm{Exp}(-\mathbb{i}xz).$$

Durch Addition und Subtraktion erhält man mit Hilfe der Euler-Formeln

$$c(x) = \tfrac{1}{2}\big(\mathrm{Exp}(\mathbb{i}xz) + \mathrm{Exp}(-\mathbb{i}xz)\big) = \mathrm{Cos}(zx) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{C},$$
$$s(x) = \tfrac{1}{2\mathbb{i}}\big(\mathrm{Exp}(\mathbb{i}xz) - \mathrm{Exp}(-\mathbb{i}xz)\big) = \mathrm{Sin}(zx) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{C}.$$

3. Es gelten die Additionstheoreme für den komplexen Cosinus und Sinus. □

Aufgabe 12. Sei $e : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion mit $e(\mathbb{0}) = \mathbb{1}$, $De(\mathbb{0}) = z \in \mathbb{C}$. Man zeige, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt das Additionstheorem $e(x + y) = e(x)e(y)$.
2. Für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt die Gleichung $De(x) = ze(x)$.
3. Es gilt $e(x) = \operatorname{Exp}(zx)$ für alle $x \in \mathbb{C}$.

Lösung. 1. Unter der Annahme, daß das Additionstheorem gilt, differenziert man auf beiden Seiten nach y und erhält

$$De(x + y) = e(x)De(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{C}.$$

Setzt man $y = \mathbb{0}$, so folgt aus $De(\mathbb{0}) = z$ die Differentialgleichung $De(x) = ze(x)$ für alle $x \in \mathbb{C}$.

2. Sei die Differentialgleichung $De(x) = ze(x)$ für alle $x \in \mathbb{C}$ erfüllt. Definiert man die analytische Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$f(x) = \operatorname{Exp}(-xz)\, e(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{C},$$

dann erhält man durch Differentiation für alle $x \in \mathbb{C}$ die Beziehung

$$Df(x) = -z \operatorname{Exp}(-xz)\, e(x) + \operatorname{Exp}(-xz) De(x) = \mathbb{0}.$$

Wegen $e(\mathbb{0}) = \mathbb{1}$ liefert der Mittelwertsatz $f(x) = f(\mathbb{0}) = e(\mathbb{0}) = \mathbb{1}$ für alle $x \in \mathbb{C}$ und somit $e(x) = f(x) \operatorname{Exp}(xz) = \operatorname{Exp}(xz)$.

3. Das Additionstheorem gilt für die komplexe Exponentialfunktion. $\square$