Übungsaufgaben 9

Kurvendiskussion

Aufgabe 1. Seien die Funktionen $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(\xi) = \xi \ln(\xi) + (1-\xi)\ln(1-\xi) \quad \text{für } \xi \in]0,1[, \qquad g(x) = \ln(1+\exp(x)) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

1. Man weise nach, daß $\lim_{\xi\downarrow 0} f(\xi) = 0$ und $\lim_{\xi\uparrow 1} f(\xi) = 0$ gilt!
2. Man zeige, daß die beiden Ableitungen $Df :]0,1[\to \mathbb{R}$ und $Dg : \mathbb{R} \to]0,1[$ streng monoton wachsende und zueinander inverse Funktionen sind! ⑥

Lösung. 1. Die Regel von Bernoulli-de l'Hospital liefert zunächst

$$\lim_{\xi\downarrow 0} \xi \ln(\xi) = \lim_{\xi\downarrow 0} \frac{\ln(\xi)}{\frac{1}{\xi}} = -\lim_{\xi\downarrow 0} \frac{\frac{1}{\xi}}{\frac{1}{\xi^2}} = -\lim_{\xi\downarrow 0} \xi = 0$$

und genauso

$$\lim_{\xi\uparrow 1}(1-\xi)\ln(1-\xi) = \lim_{\xi\uparrow 1} \frac{\ln(1-\xi)}{\frac{1}{1-\xi}} = -\lim_{\xi\uparrow 1} \frac{\frac{1}{1-\xi}}{\frac{1}{(1-\xi)^2}} = -\lim_{\xi\uparrow 1}(1-\xi) = 0.$$

Mit $\lim_{\xi\downarrow 0}(1-\xi)\ln(1-\xi) = 0$ und $\lim_{\xi\uparrow 1} \xi\ln(\xi) = 0$ folgen daraus die beiden Grenzwertbeziehungen $\lim_{\xi\downarrow 0} f(\xi) = 0$ und $\lim_{\xi\uparrow 1} f(\xi) = 0$.

2. Offenbar besitzen die Funktionen f und g Ableitungen der Gestalt

$$Df(\xi) = \ln(\xi) - \ln(1-\xi) \quad \text{für } \xi \in]0,1[, \qquad Dg(x) = \frac{\exp(x)}{1+\exp(x)} \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$
$$D^2f(\xi) = \frac{1}{\xi} + \frac{1}{1-\xi} \quad \text{für } \xi \in]0,1[, \qquad D^2g(x) = \frac{\exp(x)}{(1+\exp(x))^2} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

3. Wegen der Grenzwertbeziehungen

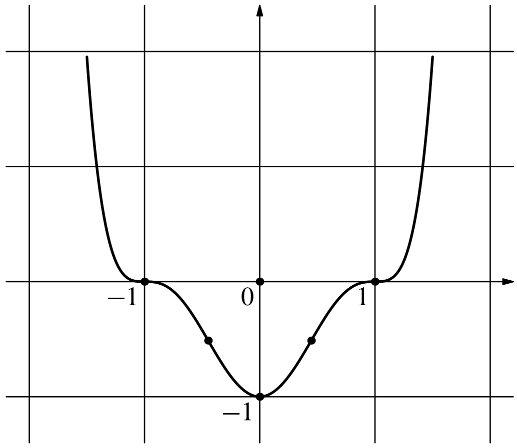
$$\lim_{\xi\downarrow 0} Df(\xi) = \lim_{\xi\downarrow 0} \ln(\xi) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} Dg(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+\exp(-x)} = 0,$$
$$\lim_{\xi\uparrow 1} Df(\xi) = -\lim_{\xi\uparrow 1} \ln(1-\xi) = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty} Dg(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\exp(-x)} = 1,$$

sind $Df :]0,1[\to \mathbb{R}$ und $Dg : \mathbb{R} \to]0,1[$ surjektiv. Da $D^2f(\xi) > 0$ für alle $\xi \in]0,1[$ sowie $D^2g(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, sind die Ableitungen $Df :]0,1[\to \mathbb{R}$ und $Dg : \mathbb{R} \to]0,1[$ streng monoton wachsende Funktionen und damit auch injektiv.

4. Aufgrund von

$$Dg(Df(\xi)) = \frac{\exp(\ln(\xi) - \ln(1-\xi))}{1+\exp(\ln(\xi) - \ln(1-\xi))} = \frac{\xi}{1-\xi} \cdot \frac{1-\xi}{(1-\xi)+\xi} = \xi \quad \text{für } \xi \in]0,1[,$$
$$Df(Dg(x)) = \ln\frac{\exp(x)}{1+\exp(x)} - \ln\frac{1}{1+\exp(x)} = \ln(\exp(x)) = x \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

sind $Df :]0,1[\to \mathbb{R}$ und $Dg : \mathbb{R} \to]0,1[$ zueinander inverse Funktionen. □



Aufgabe 2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = (x^2 - 1)^3$ für $x \in \mathbb{R}$ definiert.

1. Man bestimme alle Nullstellen und den Wertebereich von f!
2. Man finde alle lokalen Extrempunkte und Wendepunkte von f!
3. Auf welchen Intervallen ist f jeweils streng monoton, konvex bzw. konkav? ⑧

Lösung. 1. Da $f(x) = (x-1)^3(x+1)^3$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, hat die Funktion f die beiden Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$. Da die durch $g(x) = x^2 - 1$ für $x \in \mathbb{R}$ sowie $h(y) = y^3$ für $y \in [-1, \infty[$ definierten Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $h : [-1, \infty[\to \mathbb{R}$ jeweils den Wertebereich $[-1, \infty[$ haben, muß auch die Verkettung $f = h \circ g$ den Wertebereich $[-1, \infty[$ besitzen.

2. Als ganze rationale Funktion ist f analytisch und besitzt die Ableitung

$$Df(x) = 6x(x^2-1)^2 = 6x(x-1)^2(x+1)^2 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Die Ableitung $Df : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat die drei Nullstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$.

Außerdem gilt $Df(x) > 0$ für alle $x \in \,]0, 1[$ sowie $x \in \,]1, \infty[$, das heißt, die Funktion f ist streng monoton wachsend in $[0, \infty[$. Analog dazu gilt $Df(x) < 0$ für alle $x \in \,]-\infty, -1[$ sowie $x \in \,]-1, 0[$, das heißt, die Funktion f ist streng monoton fallend in $]-\infty, 0]$. Damit hat f in $x_0 = 0$ ein strenges lokales Minimum und in $x_1 = 1$ sowie $x_2 = -1$ *keine* lokalen Extremwerte.

3. Die zweite Ableitung von f hat die Gestalt

$$D^2f(x) = 6(x^2-1)^2 + 24x^2(x^2-1) = 6(x^2-1)(5x^2-1) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

und somit die vier Nullstellen $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = \frac{1}{5}\sqrt{5}$ und $x_4 = -\frac{1}{5}\sqrt{5}$.

Es gilt $D^2f(x) > 0$ für alle $x \in \,]-\infty, -1[$, $x \in \left]-\frac{1}{5}\sqrt{5}, \frac{1}{5}\sqrt{5}\right[$ sowie $x \in \,]1, \infty[$, das heißt, die Funktion f ist streng konvex auf den Intervallen $]-\infty, -1]$, $\left[-\frac{1}{5}\sqrt{5}, \frac{1}{5}\sqrt{5}\right]$ und $[1, \infty[$. Ferner gilt $D^2f(x) < 0$ für alle $x \in \left]-1, -\frac{1}{5}\sqrt{5}\right[$ und $x \in \left]\frac{1}{5}\sqrt{5}, 1\right[$, das heißt, die Funktion f ist streng konkav auf den Intervallen $\left[-1, -\frac{1}{5}\sqrt{5}\right]$ und $\left[\frac{1}{5}\sqrt{5}, 1\right]$. Damit hat f in $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = \frac{1}{5}\sqrt{5}$ und $x_4 = -\frac{1}{5}\sqrt{5}$ jeweils Wendepunkte. □

Aufgabe 3. Für welche Parameter $t \in [0, 2\pi]$ hat der Punkt

$$g(t) = (a \cos t, b \sin t) \in \mathbb{C}$$

auf der Ellipse mit den Halbachsen $a = 4$ und $b = 8$ vom eingeschlossenen Punkt $z = (0, 3) \in \mathbb{C}$ den größten bzw. kleinsten Abstand? ⑥

Lösung. 1. Der Abstand $|g(t) - z|$ eines Punktes $g(t) = (4 \cos t, 8 \sin t) \in \mathbb{C}$ vom Punkt $z = (0, 3) \in \mathbb{C}$ nimmt wegen des strengen monotonen Wachstums der durch $h(x) = x^2$ für $x \in [0, \infty[$ definierten quadratischen Funktion $h : [0, \infty[\to [0, \infty[$ genau dann (lokale) Extremwerte für einen Parameter $t \in [0, 2\pi]$ an, wenn die durch

$$f(t) = |g(t) - z|^2 = (4 \cos t)^2 + (8 \sin t - 3)^2 \quad \text{für } t \in [0, 2\pi]$$

definierte Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ in $t \in [0, 2\pi]$ (lokale) Extremwerte annimmt.

2. Die Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ besitzt die Ableitungen

$$Df(t) = 16(8 \sin t - 3) \cos t - 32 \sin t \cos t = 48(2 \sin t - 1) \cos t$$
$$D^2 f(t) = 96(\cos^2 t - \sin^2 t) + 48 \sin t = 48(2 + \sin t - 4 \sin^2 t)$$

für $t \in [0, 2\pi]$. Man erhält genau dann $Df(t) = 0$ für $t \in [0, 2\pi]$, wenn eine der Bedingungen $\cos t = 0$ oder $\sin t = \frac{1}{2}$ und somit $t \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ gilt.

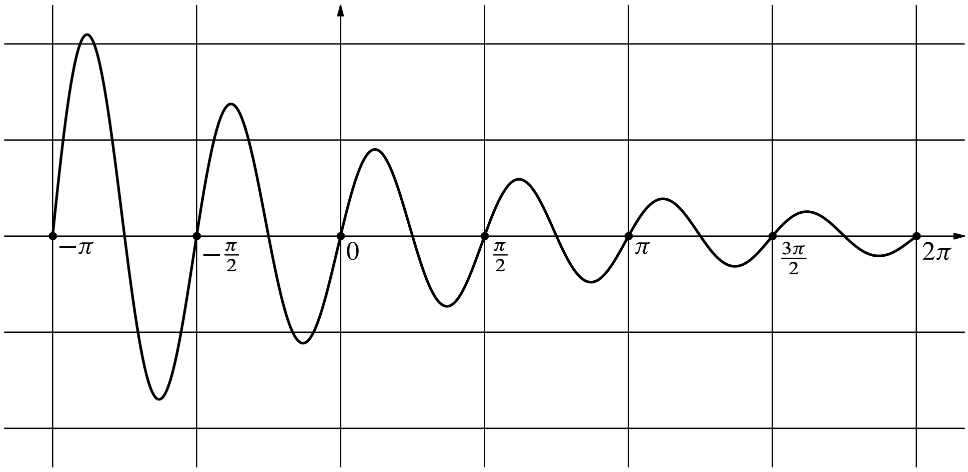
Aufgrund von $D^2 f\left(\frac{\pi}{6}\right) = D^2 f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 72$ nimmt f in $t \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$ jeweils das strenge lokale Minimum $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 13$ an, welches wegen $f(0) = f(2\pi) = 25$ das *globale* Minimum der Funktion f ist.

Wegen $D^2 f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -48$ und $D^2 f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -144$ besitzt f in $t \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ jeweils das strenge lokale Maximum $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 25$ bzw. $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 121$. Da $f(0) = f(2\pi) = 25$ gilt, hat die Funktion f somit in $t = \frac{3\pi}{2}$ ihr *globales* Maximum. $\square$

Alternative Lösung. 2. Die Beziehung $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ liefert die Darstellung

$$f(t) = 16 - 16 \sin^2 t + 64 \sin^2 t - 48 \sin t + 9 = 48\left(\sin t - \tfrac{1}{2}\right)^2 + 13 \quad \text{für } t \in [0, 2\pi].$$

Da der Sinus den Wertebereich $[-1, 1]$ besitzt, nimmt die Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ somit ihr *globales* Maximum in den Punkten $t \in [0, 2\pi]$ mit $\sin t = -1$, das heißt in $t = \frac{3\pi}{2}$ an, wohingegen die Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ in den Punkten $t \in [0, 2\pi]$ mit $\sin t = \frac{1}{2}$, also in $t \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$, ihr *globales* Minimum erreicht. $\square$



Aufgabe 4. *Gedämpfte Schwingungen* werden durch Funktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschrieben, die mit Hilfe einer gegebenen *Dämpfung* $a > 0$ und *Frequenz* $b > 0$ durch

$$u(t) = \mathrm{e}^{-at} \sin bt \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \text{ definiert werden.}$$

1. Man finde alle lokalen Extrempunkte und Wendepunkte von u!
2. Auf welchen Intervallen ist f jeweils streng monoton, konvex bzw. konkav?

Lösung. 1. Seien $r \in \,]0, \infty[$, $\beta \in \mathbb{R}$ Polarkoordinaten von $(-a, b) = (r \cos \beta, r \sin \beta)$. Dann besitzt $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ nach den Additionstheoremen die Ableitung

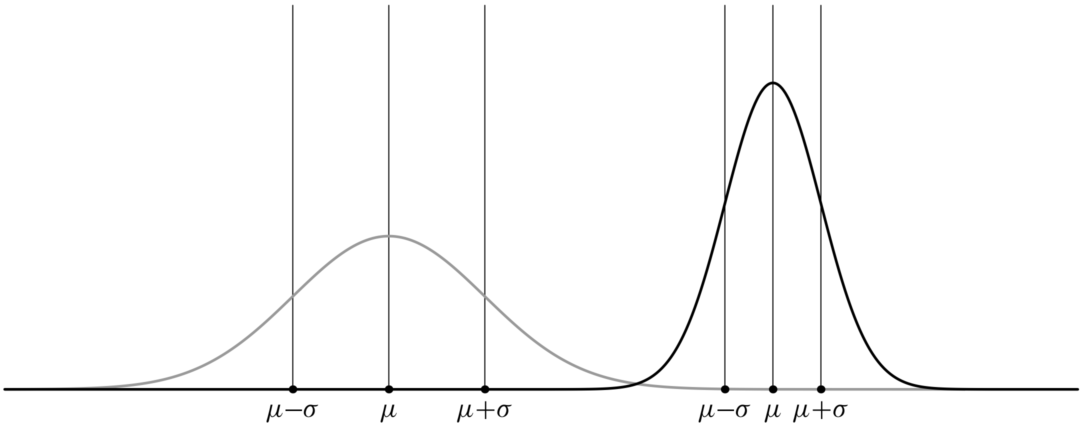
$$Du(t) = -a\mathrm{e}^{-at} \sin bt + b\mathrm{e}^{-at} \cos bt = r\mathrm{e}^{-at} \sin(bt + \beta).$$

Die Ableitung $Du : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat die durch $bt_k + \beta = k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ gegebenen Nullstellen $t_k = \frac{1}{b}(k\pi - \beta)$. Ferner gilt $\sin(bt + \beta) > 0$ und somit $Du(t) > 0$ für alle $t \in \,]t_{2k}, t_{2k+1}[$ und $k \in \mathbb{Z}$, das heißt, u ist streng monoton wachsend auf $[t_{2k}, t_{2k+1}]$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$. Genauso ergibt sich $\sin(bt + \beta) < 0$ und damit $Du(t) < 0$ für alle $t \in \,]t_{2k-1}, t_{2k}[$ und $k \in \mathbb{Z}$. Also ist u streng monoton fallend auf $[t_{2k-1}, t_{2k}]$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$. Damit hat die Funktion u in $t_{2k} = \frac{1}{b}(2k\pi - \beta)$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ein strenges lokales Minimum und in $t_{2k+1} = \frac{1}{b}((2k + 1)\pi - \beta)$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ein strenges lokales Maximum.

3. Die zweite Ableitung von u hat für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Gestalt

$$D^2u(t) = -ar\mathrm{e}^{-at} \sin(bt + \beta) + br\mathrm{e}^{-at} \cos(bt + \beta) = r^2\mathrm{e}^{-at} \sin(bt + 2\beta)$$

und somit die durch $b\tau_k + 2\beta = k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ gegebenen Nullstellen $\tau_k = \frac{1}{b}(k\pi - 2\beta)$. Es gilt $\sin(bt + 2\beta) > 0$ und somit $D^2u(t) > 0$ für alle $t \in \,]\tau_{2k}, \tau_{2k+1}[$ und $k \in \mathbb{Z}$, das heißt, u ist streng konvex auf $[\tau_{2k}, \tau_{2k+1}]$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$. Außerdem ergibt sich $\sin(bt + 2\beta) < 0$ und damit $D^2u(t) < 0$ für alle $t \in \,]\tau_{2k-1}, \tau_{2k}[$ und $k \in \mathbb{Z}$. Also ist u streng konkav auf $[\tau_{2k-1}, \tau_{2k}]$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$. Damit hat die Funktion u in $\tau_k = \frac{1}{b}(k\pi - 2\beta)$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ einen Wendepunkt. $\square$



Aufgabe 5. Seien die Parameter *Erwartungswert* $\mu \in \mathbb{R}$ und *Standardabweichung* $\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ der *Gauß-Normalverteilung* $\Phi : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ vorgegeben, welche durch

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ definiert wird.}$$

1. Man finde alle lokalen Extrempunkte und Wendepunkte von f!
2. Auf welchen Intervallen ist f jeweils streng monoton, konvex bzw. konkav?

Lösung. 1. Die Ableitung der analytischen Funktion Φ hat die Gestalt

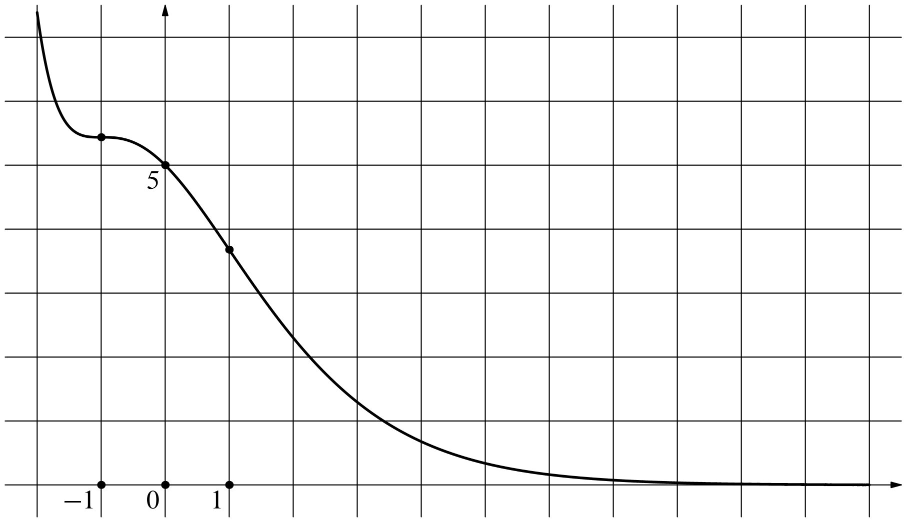
$$D\Phi(x) = -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{x-\mu}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Da $D\Phi(x) > 0$ für alle $x \in]-\infty, \mu[$ sowie $D\Phi(x) < 0$ für alle $x \in]\mu, \infty[$ gilt, wächst die Funktion Φ streng monoton auf $]-\infty, \mu]$, besitzt in μ ein strenges lokales Maximum und fällt streng monoton auf $[\mu, \infty[$.

2. Die zweite Ableitung von Φ hat die Form

$$D^2\Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{(x-\mu)^2 - \sigma^2}{\sigma^4} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Da $D^2\Phi(x) > 0$ für alle $x \in]-\infty, \mu - \sigma[$ und $x \in]\mu + \sigma, \infty[$ sowie $D^2\Phi(x) < 0$ für alle $x \in]\mu - \sigma, \mu + \sigma[$ gilt, ist die Funktion Φ streng konvex auf $]-\infty, \mu - \sigma]$ und $[\mu + \sigma, \infty[$, streng konkav auf $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ und besitzt in $\mu \pm \sigma$ jeweils einen Wendepunkt. $\square$



Aufgabe 6. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = (x^2 + 4x + 5)\exp(-x)$ für $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

1. Man zeige, daß f streng monoton fallend ist und bestimme den Wertebereich!
2. Auf welchen Intervallen ist f streng konvex bzw. streng konkav?
3. Man finde alle lokalen Extrempunkte und Wendepunkte von f!

Lösung. 1. Da $f(x) = \big((x+2)^2 + 1\big)\exp(-x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, besitzt die Funktion f *keine* Nullstellen. Die Ableitungen haben für $x \in \mathbb{R}$ die Gestalt

$$Df(x) = (2x+4)\exp(-x) - (x^2+4x+5)\exp(-x) = -(x+1)^2\exp(-x),$$

$$D^2f(x) = -(2x+2)\exp(-x) + (x^2+2x+1)\exp(-x) = (x+1)(x-1)\exp(-x).$$

Somit gilt $Df(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, das heißt, die Funktion f ist streng monoton fallend und hat somit *keine* lokalen Extremwerte.

Um einzusehen, daß neben $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ auch $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ gilt, soll die Regel von Bernoulli-de l'Hospital angewendet werden: In der Tat ergibt sich

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4x+5}{\exp(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+4}{\exp(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\exp(x)} = 0.$$

Somit hat die Funktion f den Wertebereich $]0, \infty[$.

2. Da für alle $x \in\,]-\infty, -1[$ und $x \in\,]1, \infty[$ stets $D^2f(x) > 0$ gilt, ist die Funktion f auf den Intervallen $]-\infty, -1]$ und $[1, \infty[$ streng konvex. Da $D^2f(x) < 0$ für jedes $]-1, 1[$ gilt, ist die Funktion f auf dem Intervall $[-1, 1]$ streng konkav und besitzt in $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ Wendepunkte. $\square$

Aufgabe 7. Eine Teilchen der Masse $m > 0$ bewegt sich im Zeitintervall $[0, 2\pi]$ längs einer geschlossenen Bahnkurve $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, welche durch

$$f(t) = (4\cos t - \cos 4t, 4\sin t - \sin 4t) \quad \text{für } t \in [0, 2\pi] \text{ gegeben ist.}$$

Zu welchen Zeitpunkten $t \in [0, 2\pi]$ ist die kinetische Energie $E(t) = \frac{m}{2}|Df(t)|^2$ des Teilchens minimal bzw. maximal?

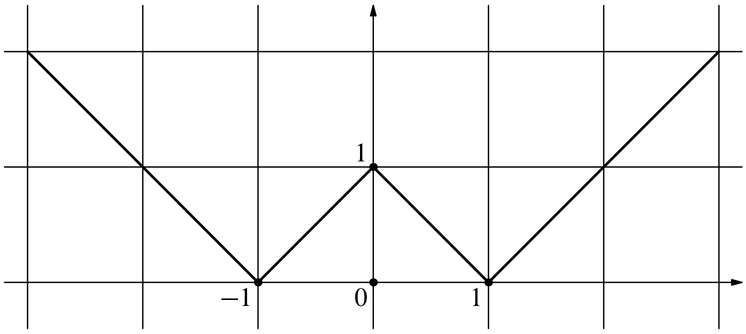
Lösung. Zum Zeitpunkt $t \in [0, 2\pi]$ hat das Teilchen die Geschwindigkeit

$$Df(t) = (-4\sin t + 4\sin 4t, 4\cos t - 4\cos 4t),$$

woraus sich für die kinetische Energie $E(t) = \frac{m}{2}|Df(t)|^2$ die Beziehung

$$\begin{aligned} E(t) &= 8m\big(\sin^2 t - 2\sin t \sin 4t + \sin^2 4t + \cos^2 t - 2\cos t \cos 4t + \cos^2 4t\big) \\ &= 8m\big(2 - 2(\sin t \sin 4t + \cos t \cos 4t)\big) = 16m(1 - \cos 3t) \end{aligned}$$

aufgrund der Additionstheoreme ergibt. Da die Funktion $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ihre Minima bzw. Maxima in den Punkten $\tau = \pi + 2\pi k$ bzw. $\tau = 2\pi k$ für $k \in \mathbb{Z}$ hat, nimmt die kinetische Energie $E(t)$ des Teilchens zu den Zeitpunkten $t \in \big\{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi\big\}$ ihr *globales* Minimum $E(0) = 0$ und zu den Zeitpunkten $t \in \big\{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\big\}$ ihr *globales* Maximum $E(\pi) = 32m > 0$ an. $\square$



Aufgabe 8. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \big||x|-1\big|$ für $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Man bestimme die Nullstellen, den Wertebereich und die lokalen Extrempunkte der Funktion f!

Lösung. 1. Es gilt genau dann $f(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$, wenn $|x| = 1$ und demzufolge $x \in \{-1, 1\}$ gilt. Somit sind $x_1 = 1$ sowie $x_2 = -1$ die Nullstellen der Funktion f.

2. Da die durch $g(x) = |x| - 1$ für $x \in \mathbb{R}$ definierte Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ den Wertebereich $[-1, \infty[$ besitzt, hat die Funktion $f = |g| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ den Wertebereich $[0, \infty[$. Da die innere Funktion g die Darstellung

$$g(x) = |x| - 1 = \begin{cases} -x - 1 & \text{für } x \in \,]-\infty, 0], \\ x - 1 & \text{für } x \in [0, \infty[\end{cases}$$

besitzt, ergibt sich für die Verkettung $f = |g|$ die Darstellung

$$f(x) = |g(x)| = \big||x| - 1\big| = \begin{cases} -x - 1 & \text{für } x \in \,]-\infty, -1], \\ x + 1 & \text{für } x \in [-1, 0], \\ -x + 1 & \text{für } x \in [0, 1], \\ x - 1 & \text{für } x \in [1, \infty[. \end{cases}$$

3. Somit ist f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ differenzierbar, und man erhält

$$Df(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \in \,]-\infty, -1[\,\cup\,]0, 1[, \\ 1 & \text{für } x \in \,]-1, 0[\,\cup\,]1, \infty[. \end{cases}$$

Daraus folgt, daß f in $x_0 = 0$ das strenge lokale Maximum $f(0) = 1$ und in $x_1 = 1$ sowie $x_2 = -1$ jeweils das strenge lokale Minimum $f(1) = f(-1) = 0$ besitzt, das somit auch das *globale* Minimum der Funktion f ist. $\square$