Vorlesung 10

Mehrmals differenzierbare Funktionen

Es werden höhere Differenzierbarkeitsbegriffe für Funktionen $f : X \to \mathbb{L}$ eingeführt, welche auf einer Teilmenge $X \subset \mathbb{K}$ des Körpers $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ definiert sind, der im Körper $\mathbb{L} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ enthalten ist.

Mehrmals differenzierbare Funktionen. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ vorgegeben.

1. Man nennt eine Funktion $f : X \to \mathbb{L}$ *n-mal differenzierbar in $x_0 \in X$*, wenn f $(n-1)$-mal differenzierbar und die $(n-1)$-te Ableitung $D^{n-1}f : X \to \mathbb{L}$ von f in x_0 differenzierbar ist. Die Ableitung der $(n-1)$-ten Ableitung $D^{n-1}f : X \to \mathbb{L}$ von f in x_0 wird *n-te Ableitung $D^n f(x_0) \in \mathbb{L}$ von f in x_0* genannt.
2. Die Funktion $f : X \to \mathbb{L}$ heißt *n-mal differenzierbar*, wenn f eine $(n-1)$-mal differenzierbare Funktion und deren $(n-1)$-te Ableitung $D^{n-1}f : X \to \mathbb{L}$ differenzierbar ist. Diejenige Funktion $D^n f : X \to \mathbb{L}$, welche jedem $x_0 \in X$ die n-te Ableitung $D^n f(x_0) \in \mathbb{L}$ von f in x_0 zuordnet, heißt *n-te Ableitung von f*.
3. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{L}$ wird *unendlichmal differenzierbar* genannt, wenn sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ n-mal differenzierbar ist.

Berührung höherer Ordnung. Sind die Funktionen $f, h : X \to \mathbb{L}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ in $x_0 \in X$ n-mal differenzierbar und gilt $D^k f(x_0) = D^k h(x_0)$ für alle $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, dann haben f und h in $x_0 \in X$ eine *tangentiale Berührung mindestens n-ter Ordnung*.

Operationen mit mehrmals differenzierbaren Funktionen. Sind die Funktionen $f, h : X \to \mathbb{L}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ in $x_0 \in X$ n-mal differenzierbar, dann sind die Summe $f + h$ und das Produkt fh in x_0 ebenfalls n-mal differenzierbar, und es gelten

$$D^n(f+h)(x_0) = D^n f(x_0) + D^n h(x_0) \in \mathbb{L},$$

$$D^n(fh)(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k f(x_0) D^{n-k} h(x_0) \in \mathbb{L}.$$

Taylor-Formel für ganze rationale Funktionen. Seien $m \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{K}$ sowie $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{K}$. Für jedes $n \in \{0, 1, \ldots, m\}$ hat die durch $f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k (x - x_0)^k$ für $x \in \mathbb{K}$ definierte ganze rationale Funktion $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ in $x \in \mathbb{K}$ die n-te Ableitung

$$D^n f(x) = \sum_{k=n}^{m} \binom{k}{n} n!\, a_k (x - x_0)^{k-n} \in \mathbb{K},$$

woraus sich für $x = x_0$ offenbar $D^n f(x_0) = n!\, a_n \in \mathbb{K}$ ergibt. Daraus folgt die Darstellung der ganzen rationalen Funktion f durch die Taylor-Formel

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{D^k f(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad \text{für alle } x \in \mathbb{K}.$$

Taylor-Entwicklung mit Restabschätzung. Seien $x, x_0 \in \mathbb{K}$ mit $x \neq x_0$ und eine die Strecke $S = \big\{(1-\theta)x + \theta x_0 \in \mathbb{K} \mid \theta \in [0,1]\big\}$ umfassende Menge $X \subset \mathbb{K}$ gegeben.

1. Sind $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $f : X \to \mathbb{L}$ $(n+1)$-mal differenzierbar, dann ist die durch

$$g(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k f(z)}{k!} (x-z)^k \in \mathbb{L} \quad \text{für } z \in X$$

definierte Funktion $g : X \to \mathbb{L}$ differenzierbar. Produkt- und Kettenregel liefern

$$\begin{aligned} Dg(z) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{D^{k+1} f(z)}{k!} (x-z)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{D^k f(z)}{k!} k(x-z)^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{D^k f(z)}{(k-1)!} (x-z)^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{D^k f(z)}{(k-1)!} (x-z)^{k-1} = \frac{D^{n+1} f(z)}{n!} (x-z)^n \end{aligned}$$

für jedes $z \in X$. Da $|g(x) - g(x_0)| \leq |x - x_0| \sup_{z \in S} |Dg(z)|$ aufgrund des Mittelwertsatzes gilt, erhält man wegen $g(x) = f(x)$ die Restabschätzung

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k f(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right| \leq \frac{1}{n!} |x - x_0|^{n+1} \sup_{z \in S} |D^{n+1} f(z)|$$

für die *Taylor-Entwicklung von f im Punkt $x \in X$ um den Entwicklungspunkt $x_0 \in X$.*

2. Ist die Funktion $f : X \to \mathbb{L}$ unendlichmal differenzierbar und gilt

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n!} |x - x_0|^{n+1} \sup_{z \in S} |D^{n+1} f(z)| = 0,$$

so konvergiert die *Taylor-Reihe* $\big(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D^k f(x_0)(x - x_0)^k\big)$ *von f im Punkt $x \in X$ um den Entwicklungspunkt $x_0 \in X$* gegen den Grenzwert $f(x) \in \mathbb{L}$.

Taylor-Reihen für Sinus und Cosinus. 1. Für alle $\xi, x \in \mathbb{R}$ gelten die Beziehungen

$$\sin\xi - \sin x = 2\cos\frac{\xi + x}{2} \sin\frac{\xi - x}{2} \quad \text{und} \quad \cos\xi - \cos x = -2\sin\frac{\xi + x}{2} \sin\frac{\xi - x}{2}.$$

Wegen der Stetigkeit dieser Funktionen und der Beziehung $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ folgt daraus deren Differenzierbarkeit, denn man erhält für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Ableitungen

$$D\sin(x) = \lim_{\xi \to x} \frac{\sin\xi - \sin x}{\xi - x} = \cos x \quad \text{und} \quad D\cos(x) = \lim_{\xi \to x} \frac{\cos\xi - \cos x}{\xi - x} = -\sin x$$

und damit sogar die k-malige Differenzierbarkeit für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vermöge

$$D^k \sin(x) = \sin\big(x + \tfrac{k\pi}{2}\big) \quad \text{sowie} \quad D^k \cos(x) = \cos\big(x + \tfrac{k\pi}{2}\big).$$

2. Wegen der Beschränkheit $|D^k \sin(x)| \leq 1$ sowie $|D^k \cos(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und jedes $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ konvergiert die Taylor-Reihe $\big(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!}(-1)^k x^{2k+1}\big)$ bzw. $\big(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!}(-1)^k x^{2k}\big)$ von Sinus bzw. Cosinus im Punkt $x \in \mathbb{R}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ jeweils gegen den Grenzwert $\sin x \in \mathbb{R}$ bzw. $\cos x \in \mathbb{R}$.