Vorlesung 12

Elementare reelle Funktionen

Reelle Exponentialfunktion. 1. Definiert man für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ die Funktion $e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch die Teilsumme $e_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$, dann nennt man die Potenzreihe (e_n) die *reelle Exponentialreihe*. Aufgrund des Quotientenkriteriums

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0$$

konvergiert die reelle Exponentialreihe (e_n) auf $\mathbb{R}$ gegen eine ganze analytische Grenzfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch die Summe

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

definiert und als *reelle Exponentialfunktion* bezeichnet wird.

2. Die reelle Zahl $\mathrm{e} = \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ wird *Euler-Zahl* genannt.

3. Da die summandenweise differenzierte Potenzreihe (De_n) wieder mit der Potenzreihe (e_n) übereinstimmt, gilt $D^k \exp = \exp$ für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Additionstheorem der Exponentialfunktion. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ liefert die binomische Formel die Cauchy-Produkte

$$\sum_{\ell=0}^{k} \frac{x^\ell}{\ell!} \cdot \frac{y^{k-\ell}}{(k-\ell)!} = \frac{1}{k!} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} x^\ell y^{k-\ell} = \frac{(x+y)^k}{k!} .$$

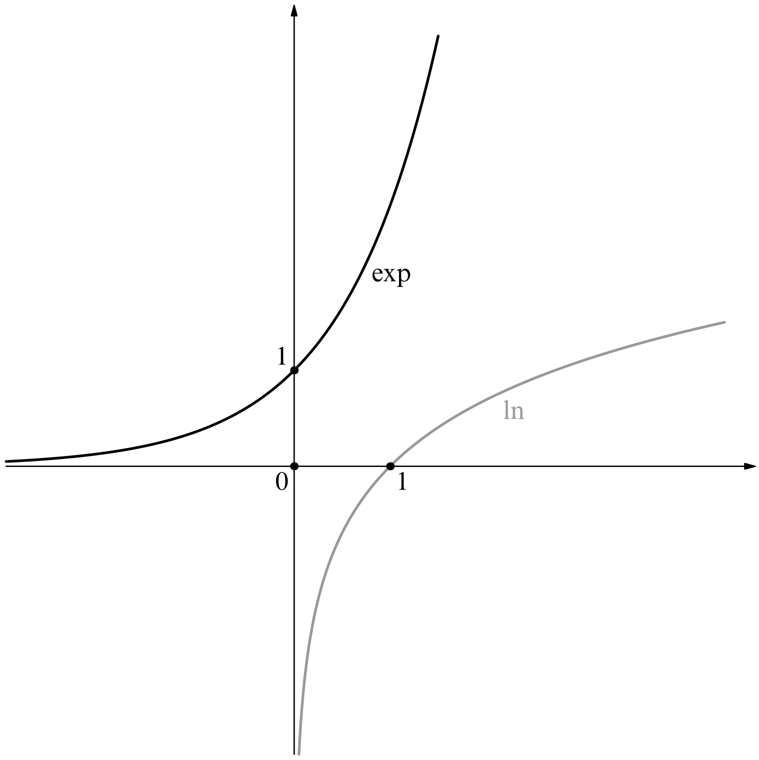
Durch Multiplikation von Exponentialreihen folgt daraus das Additionstheorem

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Nullstellenfreiheit der Exponentialfunktion. Die reelle Exponentialfunktion besitzt *keine* Nullstellen, denn es gilt $\exp(x)\exp(-x) = \exp(0) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Strenge Monotonie der reellen Exponentialfunktion. Es gelten die Relationen

1. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ gilt $\exp(x) \geq 1 + x \geq 1$.
2. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \leq 0$ gilt $\exp(-x) \geq 1 - x \geq 1$, also $0 < \exp(x) \leq \frac{1}{1-x} \leq 1$.
3. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt genau dann $\exp(x) = 1$, wenn $x = 0$ ist.
4. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ gilt $\exp(x) = \exp(y)\exp(x-y) < \exp(y)$.
5. Es gelten $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$ sowie $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$.
6. Die reelle Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \,]0, \infty[$ ist bijektiv.



Reelle Logarithmusfunktion. 1. Die stetige, bijektive und streng monotone Inverse $\ln = \exp^{-1} :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ von $\exp : \mathbb{R} \to]0,\infty[$ wird als *reeller Logarithmus* bezeichnet. Da für alle $x \in \mathbb{R}$ stets $D\exp(x) = \exp(x) > 0$ gilt, ist der reelle Logarithmus $\ln :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit der Ableitung

$$D\ln(\xi) = \frac{1}{D\exp(x)} = \frac{1}{\exp(x)} = \frac{1}{\xi} \quad \text{für jedes } \xi = \exp(x) \in]0,\infty[\text{ mit } x \in \mathbb{R}.$$

2. Somit ist $\ln :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ unendlichmal differenzierbar und hat die Ableitungen

$$D^k \ln(\xi) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{\xi^k} \quad \text{für alle } \xi \in]0,\infty[\text{ und } k \in \mathbb{N}.$$

Additionstheorem der Logarithmusfunktion. Seien $\xi, \eta \in]0,\infty[$ beliebig vorgegeben. Dann gilt für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $\xi = \exp(x)$ und $\eta = \exp(y)$ die Beziehung

$$\ln(\xi\eta) = \ln(\exp(x)\exp(y)) = \ln(\exp(x+y)) = x + y = \ln(\xi) + \ln(\eta).$$

Potenzgesetze. 1. Für jedes $\xi \in]0,\infty[$ und alle $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ mit $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ gilt

$$\exp(x\ln(\xi)) = \exp\left(\tfrac{a}{b}\ln(\xi)\right) = \sqrt[b]{\exp(a\ln(\xi))} = \big(\exp(\ln(\xi))\big)^x = \xi^x.$$

2. Als Verallgemeinerung definiert man für jede *Basis* $\xi \in]0,\infty[$ und jeden *reellen Exponenten* $x \in \mathbb{R}$ die *Potenz* $\xi^x = \exp(x\ln(\xi)) \in]0,\infty[$.

3. Wegen $\ln(\mathrm{e}) = 1$ gilt $\mathrm{e}^x = \exp(x\ln(\mathrm{e})) = \exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

4. Für alle $\xi \in]0,\infty[$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt $\ln(\xi^x) = x\ln(\xi)$.

5. Für alle $\xi \in]0,\infty[$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\xi^{x+y} = \xi^x\xi^y$ sowie $(\xi^x)^y = \xi^{xy} = (\xi^y)^x$.

Logarithmische Potenzreihe. 1. Die Potenzreihe (s_n) um $\xi_0 \in\,]-1, \infty[$ mit den Koeffizienten $a_0 = \ln(1+\xi_0)$ und $a_k = (-1)^{k-1}\frac{1}{k(1+\xi_0)^k}$ für $k \in \mathbb{N}$ hat wegen

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k(1+\xi_0)^k}{(k+1)(1+\xi_0)^{k+1}} = \frac{1}{1+\xi_0} \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{1+\xi_0}$$

den Konvergenzradius $R_0 = 1+\xi_0 > 0$ und konvergiert somit in $]-1, 1+2\xi_0[$ gegen eine analytische Grenzfunktion $s :]-1, 1+2\xi_0[\, \to \mathbb{R}$, welche die Gestalt

$$s(\xi) = \ln(1+\xi_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(1+\xi_0)^k}\,(\xi-\xi_0)^k \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R},\ |\xi-\xi_0| < R_0 \text{ besitzt.}$$

2. Die summandenweise differenzierte Potenzreihe (Ds_n) um $\xi_0 \in\,]-1, \infty[$ mit den Koeffizienten $((k+1)a_{k+1})$ hat ebenfalls den Konvergenzradius $R_0 = 1+\xi_0$ und konvergiert in $]-1, 1+2\xi_0[$ gegen die Ableitung $Ds :]-1, 1+2\xi_0[\, \to \mathbb{R}$ der Grenzfunktion $s :]-1, 1+2\xi_0[\, \to \mathbb{R}$. Für alle $\xi \in \mathbb{R}$ mit $|\xi-\xi_0| < R_0 = 1+\xi_0$ gilt

$$Ds(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1+\xi_0)^{k+1}}\,(\xi-\xi_0)^k = \frac{1}{1+\xi_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{\xi-\xi_0}{1+\xi_0}\right)^k = \frac{1}{1+\xi}$$

aufgrund der Summenformel der geometrischen Reihe.

3. Die durch die Vorschrift $f(\xi) = \ln(1+\xi)$ für $\xi \in\,]-1, \infty[$ definierte Funktion $f :]-1, \infty[\, \to \mathbb{R}$ hat ebenfalls die Ableitung $Df(\xi) = \frac{1}{1+\xi}$ für alle $\xi \in\,]-1, \infty[$. Aufgrund von Schritt 2 hat die Funktion $h = s - f$ für jedes $z \in \mathbb{R}$, $|z-\xi_0| < R_0$ die Ableitung $Dh(z) = 0$. Für jedes $\xi \in \mathbb{R}$, $|\xi-\xi_0| < R_0$ liefert der Mittelwertsatz

$$0 \le |h(\xi) - h(\xi_0)| \le |\xi-\xi_0| \sup_{\theta\in[0,1]} |Dh(\theta\xi + (1-\theta)\xi_0)| = 0.$$

Da $f(\xi_0) = \ln(1+\xi_0) = a_0 = s(\xi_0)$ gilt, ergibt sich schließlich $s(\xi) = f(\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$, $|\xi-\xi_0| < R_0$. Demnach konvergiert die *logarithmische Potenzreihe* (s_n) um $\xi_0 \in\,]-1, \infty[$ in $]-1, 1+2\xi_0[$ gegen die analytische Funktion $f :]-1, \infty[\, \to \mathbb{R}$.

Binomische Potenzreihe. 1. Für $x \in \mathbb{R}$ definiert man den *Binomialkoeffizienten*

$$\binom{x}{0} = 1, \quad \binom{x}{k} = \prod_{\ell=1}^{k} \frac{x-\ell+1}{\ell} \in \mathbb{R} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Man beachte, daß im Falle $x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ stets $\binom{x}{k} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k > x$ gilt.

2. Sei als Exponent $x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{N} \cup \{0\})$ gegeben. Die Potenzreihe (s_n) um $\xi_0 \in \,]-1, \infty[$ mit den Koeffizienten $a_k = \binom{x}{k}(1+\xi_0)^{x-k}$ für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ hat wegen

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{(1+\xi_0)^k}{(1+\xi_0)^{k+1}} \prod_{\ell=1}^{k+1} \frac{x-\ell+1}{\ell} \cdot \prod_{\ell=1}^{k} \frac{\ell}{x-\ell+1} \right| = \frac{1}{1+\xi_0} \lim_{k\to\infty} \left| \frac{x-k}{k+1} \right| = \frac{1}{1+\xi_0}$$

den Konvergenzradius $R_0 = 1 + \xi_0 > 0$ und konvergiert somit in $]-1, 1+2\xi_0[$ gegen eine analytische Grenzfunktion $s : \,]-1, 1+2\xi_0[\, \to \mathbb{R}$, welche die Gestalt

$$s(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{x}{k} (1+\xi_0)^{x-k} (\xi - \xi_0)^k \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R},\ |\xi - \xi_0| < R_0 \text{ besitzt.}$$

3. Die summandenweise differenzierte Potenzreihe (Ds_n) um $\xi_0 \in \,]-1, \infty[$ mit den Koeffizienten $((k+1)a_{k+1})$ hat den Konvergenzradius $R_0 = 1 + \xi_0$ und konvergiert in $]-1, 1+2\xi_0[$ gegen die Ableitung $Ds : \,]-1, 1+2\xi_0[\, \to \mathbb{R}$, das heißt, es gilt

$$Ds(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \binom{x}{k+1} (1+\xi_0)^{x-k-1} (\xi - \xi_0)^k \quad \text{für alle } \xi \in \,]-1, 1+2\xi_0[$$

und somit wegen $1 + \xi = (1+\xi_0) + (\xi - \xi_0)$ und $(k+1)\binom{x}{k+1} = (x-k)\binom{x}{k}$ auch

$$\begin{aligned} (1+\xi)Ds(\xi) &= \sum_{k=0}^{\infty} (x-k) \binom{x}{k} (1+\xi_0)^{x-k} (\xi-\xi_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{x}{k} (1+\xi_0)^{x-k} (\xi-\xi_0)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x \binom{x}{k} (1+\xi_0)^{x-k} (\xi-\xi_0)^k = xs(\xi). \end{aligned}$$

4. Die für den Exponenten $x \in \mathbb{R}$ durch $b_x(\xi) = (1+\xi)^x = \exp(x \ln(1+\xi))$ für alle $\xi \in \,]-1, \infty[$ definierte *reelle Potenzfunktion* $b_x : \,]-1, \infty[\, \to \mathbb{R}$ besitzt die Ableitung

$$Db_x(\xi) = \exp(x \ln(1+\xi)) \frac{x}{1+\xi} = x(1+\xi)^{x-1} \quad \text{für alle } \xi \in \,]-1, \infty[.$$

Damit ist die Funktion $g = sb_{-x} : \,]-1, 1+2\xi_0[\, \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt

$$Dg(\xi) = (1+\xi)^{-x} Ds(\xi) - xs(\xi)(1+\xi)^{-x-1} = 0 \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R},\ |\xi - \xi_0| < R_0$$

wegen $(1+\xi)Ds(\xi) = xs(\xi)$. Für jedes $\xi \in \mathbb{R}$, $|\xi - \xi_0| < R_0$ liefert der Mittelwertsatz

$$0 \le |g(\xi) - g(\xi_0)| \le |\xi - \xi_0| \sup\nolimits_{\theta \in [0,1]} |Dg(\theta\xi + (1-\theta)\xi_0)| = 0.$$

Wegen $g(\xi_0) = s(\xi_0)(1+\xi_0)^{-x} = 1$ folgt daraus $s(\xi) = b_x(\xi)g(\xi) = b_x(\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$, $|\xi - \xi_0| < R_0$. Demnach konvergiert die *binomische Potenzreihe* (s_n) für $x \in \mathbb{R}$ um $\xi_0 \in \,]-1, \infty[$ in $]-1, 1+2\xi_0[$ gegen die analytische Funktion $b_x : \,]-1, \infty[\, \to \mathbb{R}$.